

ORBIFOLDES GÉOMÉTRIQUES SPÉCIALES ET CLASSIFICATION BIMÉROMORPHE DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

Frédéric Campana

15 juillet 2009

Table des matières

1	INTRODUCTION	4
1.1	Abstract	4
1.2	Introduction	5
2	LA CATÉGORIE DES ORBIFOLDES GÉOMÉTRIQUES	8
2.1	Diviseurs orbifoldes	8
2.2	Invariants : dimension canonique, groupe fondamental, points entiers.	10
2.3	Morphismes orbifoldes.	12
2.4	Faisceaux de formes différentielles sur les orbifoldes géométriques lisses.	15
2.5	Tenseurs holomorphes orbifoldes.	19
2.6	Dimension canonique d'un faisceau différentiel de rang 1	20
2.7	Invariance biméromorphe de la dimension canonique	21
2.8	Fibration de Moishezon-Iitaka.	23
2.9	Invariance étale	23
2.10	Inégalité de Bogomolov (version orbifolde)	25

2.11	Équivalence biméromorphe.	26
2.12	Restriction à une sous-variété.	29
2.13	Restriction à une courbe générique d'une famille couvrante. . .	31
2.14	Fibres orbifoldes d'une fibration méromorphe.	32
2.15	Résolution d'une orbifolde géométrique.	36
2.16	Orbifoldes géométriques log-canoniques et klt	37
3	BASE ORBIFOLDE	38
3.1	Base orbifold d'un morphisme	38
3.2	Fibrations nettes.	41
3.3	Composition de fibrations	43
4	DIMENSION CANONIQUE D'UNE FIBRATION.	46
4.1	Dimension canonique d'une fibration.	46
4.2	Équivalence biméromorphe de fibrations.	48
4.3	Fibrations de type général et orbifoldes spéciales : définition. .	51
5	COURBES Δ-RATIONNELLES.	53
5.1	Notion de Δ -courbe rationnelle.	53
5.2	Uniréglage, Connexité Rationnelle orbifold	59
5.3	Invariance biméromorphe	62
5.4	Uniréglage et Dimension Canonique : Conjectures	65
5.5	Quotients globaux : descente et relèvement de courbes rationnelles	68
5.6	Quotients globaux : uniréglage et connexité rationnelle	72
5.7	Quotients globaux : le lemme de "scindage" orbifold.	74
5.8	Quotients globaux : semi-positivité générique.	76
5.9	Sections orbifoldes.	77
5.10	Quotients rationnels orbifoldes	81
5.11	Quotients globaux : l'implication $RE \implies RC$	86
5.12	Hyperbolicité algébrique.	88
5.13	Appendice : Quotients méromorphes.	88
6	ADDITIVITÉ ORBIFOLDE	90
6.1	La conjecture $C_{n,m}^{orb}$	90
6.2	Le cas des fibrations de type général.	91
6.3	Première application : $\kappa = 0$ et orbifoldes Fano.	92
6.4	Composées de fibrations de type général	93

6.5	Le quotient κ -rationnel (conditionnel)	94
7	ORBIFOLDES SPÉCIALES I	97
7.1	Fibre et base orbifold stable d'une fibration	97
7.2	Premiers exemples	98
7.3	Composition de fibrations spéciales	99
7.4	Orbifolles spéciales "divisibles".	100
8	FIBRATIONS DE TYPE GÉNÉRAL.	101
8.1	Fibrations de type général : composées	101
8.2	Faisceaux de Bogomolov	102
8.3	Restriction à une sous-variété générique.	103
8.4	Critères de presque-holomorphie	105
8.5	Réduction de type général simultanée.	106
9	LE "COEUR" D'UNE ORBIFOLLE	109
9.1	Construction du Coeur.	109
9.2	Fonctorialité.	111
9.3	Connexité par chaînes spéciales.	111
9.4	Invariance par revêtement étale.	112
9.5	Le coeur "divisible".	112
10	DÉCOMPOSITION DU COEUR.	114
10.1	La décomposition conditionnelle du coeur.	114
10.2	Analogie avec les algèbres de Lie.	116
10.3	Variétés de "type" et dimension donnés.	116
10.4	Fonctorialité (conditionnelle)	118
10.5	Relèvement de propriétés par dévissage.	119
11	GROUPE FONDAMENTAL	121
11.1	Groupe fondamental d'une orbifold géométrique lisse	121
11.2	Suite exacte associée à une fibration orbifold nette	125
11.3	Revêtement universel d'une orbifold lisse	127
11.4	Groupe fondamental d'une sous-orbifold.	130
11.5	Γ -réduction (ou réduction de Shafarevich) orbifold.	132
11.6	Finitude résiduelle et critère d'abélianité.	134

12 CONJECTURES	137
12.1 Stabilité par déformation et spécialisation	137
12.2 Groupe fondamental et revêtement universel	139
12.3 Pseudométrie de Kobayashi	141
12.4 Points rationnels : corps de fonctions	143
12.5 Points rationnels : arithmétique	144
12.6 Multiplicités “classiques” et “non-classiques”.	146
12.7 Formes différentielles	147
12.8 Familles de variétés canoniquement polarisées.	148
12.9 Questions	151
12.9.1 Orbifolles log-canoniques.	151
12.9.2 Équivalence biméromorphe des bases orbifolles.	151
12.9.3 Courbes Δ -rationnelles.	152
12.9.4 Additivité orbifolde.	152
12.9.5 Finitude des fibrations de type général.	152
12.9.6 Hyperbolicité algébrique	152
13 BIBLIOGRAPHIE	152

1 INTRODUCTION

1.1 Abstract

This is the “geometric-orbifold” version of [Ca01/04]. We define the bimeromorphic *category* of geometric orbifolds. These interpolate between (compact Kähler) manifolds and such manifolds with logarithmic structure, and may be considered as “virtual” ramified covers of the underlying manifold. These geometric orbifolds are here considered as fully geometric objects, and thus come naturally equipped with the usual invariants of varieties : morphisms and bimeromorphic maps, differential forms, fundamental groups and universal covers, Kobayashi pseudometric, fields of definition and rational points. The general expectation is that their geometry is qualitatively the same as that of manifolds with similar invariants. The most elementary of such geometric properties are established here, by direct adaptation of the arguments of [Ca01].

The motivation is that the natural frame for the theory of bimeromorphic classification of compact Kähler (and complex projective) manifolds without orbifold structure unavoidably seems to be the category of geometric orbifolds, as shown here (and in [Ca01] for manifolds) by the functorial two-step decomposition of arbitrary manifolds : first by the “core” fibration with fibres special and orbifold base of general type. Then *special* orbifolds are canonically (but conditionally) decomposed in towers of orbifolds with fibres having either $\kappa_+ = -\infty$ or $\kappa = 0$. An orbifold is *special* if it does not map “stably” onto a (positive-dimensional) orbifold of general type, while having $\kappa_+ = -\infty$ means that it maps only onto orbifolds having $\kappa = -\infty$, and is expected to mean rationally connected in the orbifold category. In a slightly different context, and for seemingly different reasons, the Log minimal model program, also considers “pairs” because most proofs naturally work, inductively on the dimension, only after the adjunction of a “boundary”.

Moreover, fibrations enjoy in the bimeromorphic category of geometric orbifolds extension (or “additivity”) properties *not satisfied* in the category of varieties without orbifold structure, permitting to express invariants of the total space as the extension (or “sum”) of those of the generic fibre and of the base. For example, the natural sequence of fundamental groups always becomes exact in the orbifold category. Also the total space of a fibration is special if so are the generic orbifold fibre and the orbifold base. In fact, geometric orbifolds were initially introduced precisely to remedy this last lack of “additivity”.

This makes this category of geometric orbifolds suitable to lift properties from orbifolds having either $\kappa_+ = -\infty$ or $\kappa = 0$ to those which are special. And even leads to expect that *specialness* is the exact geometric characterisation of some important properties (such as potential density or vanishing of the Kobayashi pseudometric).

There are still many open basic problems related to the bimeromorphic equivalence in this orbifold category which need to be studied (such as its extension to the log-canonical case).

1.2 Introduction

L’objectif du texte est en priorité de *définir* et d’établir les propriétés de base de nouveaux objets (les “orbifoldes géométriques”) qui semblent être essentiels pour la compréhension de la structure birationnelle des variétés projectives ou Kähleriennes compactes, et en donnent une vue synthétique

globale très simple. Les démonstrations données reposent cependant sur les techniques usuelles de la géométrie algébrique/analytique. De nombreuses questions ou conjectures à leur sujet sont également formulées.

Le présent texte est la suite de [Ca01/04]. Dans ce texte était introduite la notion de *base orbifold* $(Y|\Delta(f))$ d’une fibration $f : X \rightarrow Y$, avec X compacte Kähler, cette base orbifold étant vue comme un revêtement ramifié “virtuel” de Y éliminant virtuellement les fibres multiples en codimension 1 de f . Ces fibres multiples forment l’obstruction principale à exprimer les invariants géométriques fondamentaux de X comme extension (ou “somme”) de ceux de la fibre générique X_y , et de la base Y de f . On y avait introduit, de plus, une nouvelle classe de variétés, dites *spéciales*. Ce sont, par définition, celles n’ayant pas de fibration sur une base orbifold de type général. Un X arbitraire y était scindé, à l’aide d’une unique fibration fonctorielle (son “coeur”), en ses parties antithétiques : spéciale (les fibres) et de type général (la base orbifold). On y avait décomposé¹ fonctoriellement toute variété spéciale en tours de fibrations à fibres *orbifolds* ayant soit $\kappa_+ = -\infty$ (version conjecturale de la connexité rationnelle), soit $\kappa = 0$. La géométrie spéciale apparaissant ainsi comme la combinaison au sens orbifold de ces deux géométries classiques.

Cette décomposition (et aussi la théorie des modèles minimaux où l’adjonction d’un “bord” joue un rôle crucial dans les démonstrations, basées sur une récurrence sur la dimension) semble indiquer que le cadre naturel de la théorie de la classification des variétés (projectives complexes ou Kähleriennes compactes) est la *catégorie* biméromorphe des orbifolds géométriques. Cette catégorie restant, dans une première étape, à définir.

L’objectif principal du présent texte est de le faire (du moins dans le cas “lisse”), et d’en développer les propriétés de base les plus simples (celles dont la démonstration s’adapte plus ou moins directement du cas des variétés à celle des orbifolds). Le point de vue adopté est que ces objets, qui interpolent entre les variétés sans structure orbifold et les variétés logarithmiques, sont des objets géométriques à part entière, et sont donc équipés de tous les attributs des variétés usuelles : morphismes, transformations biméromorphes, formes différentielles, groupe fondamental et revêtement universel, corps de définition, points rationnels. Nous espérons développer des aspects plus profonds ultérieurement. En particulier, seules les orbifolds lisses sont étudiées ici. Il semble indispensable de considérer un cadre plus général (celui des

¹Conditionnellement en une version orbifold $C_{n,m}^{orb}$ de la conjecture $C_{n,m}$ d’Itaka.

orbifolde “klt” ou “l.c”) pour les développements ultérieurs.

Notons que les fibrations possèdent bien, dans cette catégorie, les propriétés attendues d’additivité qui font défaut dans celle des variétés sans structure orbifold, et qui sont à l’origine de leur introduction. Par exemple, la suite des groupes fondamentaux devient exacte dans cette catégorie. De même, l’espace total d’une fibration à fibres et base orbifoldes spéciales est spéciale. Cette catégorie devrait ainsi permettre, par *dévissage*, de “relever” à la “géométrie spéciale” certaines des propriétés attendues des “géométries $\kappa_+ = -\infty$ et $\kappa = 0$ ”. Et même de conjecturer que certaines propriétés importantes (densité potentielle et nullité de la pseudométrie de Kobayashi) caractérisent exactement les orbifoldes spéciales.

Remarquons que les invariants birationnels des orbifoldes logarithmiques lisses fournissent de nouveaux invariants pour les variétés quasi-projectives lisses.

Le contenu du texte est le suivant : le §2 introduit la catégorie des orbifoldes, les morphismes étant définis de 3 façons différentes (équivalentes) : multiplicités (voie géométrique ; voir définition 2.3, qui est probablement la contribution principale du présent texte), préservation des faisceaux de formes différentielles, et disques testants. Le §3 définit la base orbifold “stable” d’une fibration $f : (X|\Delta) \rightarrow Y$, et calcule la base orbifold “stable” d’une composée. Dans le §4, on établit l’invariance biméromorphe de la dimension de Kodaira de la base orbifold stable d’une fibration, résultat utilisé constamment dans la suite. Le §5 définit les courbes rationnelles orbifoldes, et pose la question de savoir si leurs propriétés sont analogues à celles du cas non orbifold. On montre que c’est bien le cas lorsque l’orbifold géométrique considérée est un “quotient global” au sens de 5.30. La considération du champ algébrique associé devrait permettre de traiter le cas général avec des arguments similaires si les multiplicités sont entières. Le §6 contient des rappels extraits de [Ca01] sur l’additivité de la dimension de Kodaira dans le cadre orbifold. C’est le résultat technique central du présent texte. Le §8 contient des préliminaires techniques sur les fibrations de type général, nécessaires pour la construction du coeur, effectuée au §9, après un exposé au §7 des propriétés et exemples de base des orbifoldes spéciales. Au §10, on décompose (conditionnellement en $C_{n,m}^{orb}$) fonctoriellement le coeur en tour de fibrations à fibres orbifoldes ayant soit $\kappa_+ = -\infty$, soit $\kappa = 0$. Ce dévissage permet de formuler des conditions sous lesquelles “relever” aux orbifoldes spéciales les propriétés attendues des orbifoldes ayant soit $\kappa_+ = -\infty$, soit $\kappa = 0$. Dans le §11, on définit et étudie le groupe fon-

damental et le revêtement universel, et on construit la Γ -réduction dans le cadre orbifold (avec morphismes au sens divisible). Dans le §12, on énonce des conjectures qui étendent directement au cadre orbifold celles de [Ca01], et résultent, pour la plupart d’entre elles, du “relèvement” du §10.

De nombreux problèmes de base de la géométrie biméromorphe dans le contexte orbifold restent à étudier (dont l’extension au cas log-canonique).

Le projet d’étendre aux orbifolds géométriques les résultats de [Ca01] y était déjà proposé. Il a été aussitôt abordé par S. Lu dans math.AG/0211029. Une notion de morphisme orbifold y est évoquée en termes de “relevant multiplicities”. Certaines des constructions de [Ca01] sont ainsi directement utilisées, mais sans interprétation géométrique, indispensable pour les applications et développements ultérieurs.

Je voudrais, par ailleurs, remercier D. Greb et K. Jabbusch pour m’avoir signalé une erreur et des imprécisions dans la version initiale du présent texte, ainsi que A. Levin pour une très intéressante discussion, et des références (dont [B 87]), sur les aspects hyperbolique et arithmétique (voir le §5.12).

2 LA CATÉGORIE DES ORBIFOLDES GÉOMÉTRIQUES

2.1 Diviseurs orbifolds

Definition 2.1 *Soit X un espace analytique complexe normal (dénombrable à l’infini; X sera, de plus, supposé compact et connexe dans la suite de ce texte, à l’exception du présent §2 essentiellement). On note $W(X)$ l’ensemble des diviseurs de Weil irréductibles de X .*

Une **multiplicité orbifold** sur X est une application $m : W(X) \rightarrow (\mathbb{Q} \cup +\infty) := \overline{\mathbb{Q}^+}$ telle que $m(D) \geq 1$ pour tout $D \in W(X)$, et telle que $m(D) = 1$ pour localement presque tout $D \in W(X)$ (ie : pour tout compact K de X , $m(D) = 1$ pour tous les $D \in W(X)$ rencontrant K , sauf un nombre fini d’entre eux). Une telle multiplicité orbifold est dite **entière** si elle prend ses valeurs dans $(\mathbb{N} \cup +\infty)$.

Une multiplicité orbifold m sera dite **finie** si elle ne prend pas la valeur $+\infty$.

Le **diviseur orbifold** associé est $\Delta := \sum_{D \in W(X)} (1 - \frac{1}{m(D)}) \cdot D$. C’est une somme localement finie définissant un \mathbb{Q} -diviseur effectif sur X . (Par

convention, $1/(+\infty) := 0$). On notera $m_\Delta : W(X) \rightarrow (\mathbb{Q} \cup +\infty)$ la multiplicité orbifold définissant Δ .

Le **support** de Δ , noté $\text{supp}(\Delta)$, ou $[\Delta]$, est la réunion des $D \in W(X)$ tels que $m(D) > 1$.

Une **orbifold géométrique**² est un couple, noté $(X|\Delta)$, de la forme précédente. Une orbifold géométrique $(X|\Delta)$ sera dite **finie** si sa multiplicité m_Δ est finie, et **entière** si sa multiplicité l'est.

On dira que $(X|\Delta)$ est **lisse** si X est lisse et si $\text{supp}(\Delta)$ est un diviseur à croisements normaux.

Remarque 2.2 1. Lorsque m ne prend que les valeurs 1 et $+\infty$, le diviseur Δ est entier, réduit, de multiplicité 1. On dira que l'orbifold géométrique $(X|\Delta)$ est **ouverte**, ou : **logarithmique**. On notera $(X|D)$ une telle orbifold géométrique. Le cas général interpole donc entre les cas propre (où $\Delta = 0$) et logarithmique.

Toute variété lisse et quasi-projective U s'écrit : $U = X - D$, avec $(X|D)$ lisse. Les propriétés de U sont celles de $(X|D)$ ne dépendant que de $X - D$. Ce sont en fait les propriétés “birationnelles” de $(X|D)$ au sens défini ci-dessous. Nous construirons ainsi de nouveaux invariants des variétés quasi-projectives lisses.

On écrira aussi $\Delta = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$ si J est un sous-ensemble localement fini de $W(X)$ contenant tous les D tels que $m(D) > 1$, avec $m_j = m(D_j), \forall j \in J$.

2. On peut considérer, plus généralement, des fonctions de multiplicité à valeurs réelles dans $\{[1, +\infty] \cup \{+\infty\}\}$. Les définitions et résultats ci-dessous s'appliquent, ainsi que leurs démonstrations, avec des modifications mineures, à ce cadre élargi (susceptible d'autres applications).

3. Si Δ, Δ' sont des diviseurs orbifoldes sur X , de fonctions de multiplicité m, m' respectivement, on dira que $\Delta \geq \Delta'$ si $m \geq m'$. (Ceci signifie en effet que $(\Delta - \Delta')$ est un diviseur effectif). Si ces deux orbifoldes géométriques sont entières, on dira que Δ' **divise** Δ (noté $m_{\Delta'}(D) | m_\Delta(D)$ divise $m_\Delta(D)$, $\forall D \in W(X)$ (avec la convention : n divise $+\infty, \forall n > 0$, entier).

4. On définit de manière évidente le produit de deux orbifoldes géométriques. Ce produit est donc lisse (resp. entier, fini) si les facteurs

²Le terme “géométrique” provient de ce que l'on ne conserve de la structure orbifold que le support (un diviseur) et les multiplicités, mais que l'on ne se donne pas d'action locale d'un groupe. En ce sens, une “orbifold géométrique” peut être vue comme la trace géométrique en codimension 1 d'une orbifold au sens de la terminologie existante.

le sont.

5. Si Δ, Δ' sont deux (ou même une famille d') orbifoldes géométriques sur X on définit de manière évidente $\sup\{\Delta, \Delta'\}$ et $\inf\{\Delta, \Delta'\}$.

6. D. Abramovich a introduit, dans [Abr 07], le terme de **constellation** et pour son raffinement toroidal, qui lui est dû, celui de **firmament**. La notion de “constellation” consiste en la donnée d’un système (compatible) de diviseurs orbifoldes géométriques sur toutes les modifications propres de X , considérées simultanément. Nous tentons ici de considérer les propriétés biméromorphes (définies de manière adéquate) des “orbifoldes géométriques” individuelles, sans inclure la totalité de la constellation associée dans la donnée initiale. La différence entre les deux notions semble cependant inessentielle.

D’ailleurs, dans le cas considéré ici, où X est projective lisse et le support de Δ à croisement normaux, la notion d’orbifold géométrique est un cas particulier de celle de “champ algébrique” lisse de Deligne-Mumford, et le terme est donc compatible (au niveau des objets, sinon des morphismes définis ci-dessous) avec les terminologies antérieures.

L’expression “orbifold géométrique” sera parfois abrégée en “orbifold” dans la suite. On parlera ainsi de “morphisms orbifoldes, fibre ou base orbifold” d’une fibration. Ceci ne devrait pas créer de confusion avec la terminologie antérieure, puisque les “orbifoldes” déjà existantes ne sont jamais considérées dans le présent texte.

2.2 Invariants : dimension canonique, groupe fondamental, points entiers.

Le **principe** que nous voudrions illustrer dans le texte qui suit est le suivant :

1. Les orbifoldes géométriques (lisses) sont des objets géométriques à part entière, au même titre que les variétés complexes (projectives ou compactes) : on peut leur attribuer en particulier les invariants géométriques définis ci-dessous, ainsi que des notions de morphismes et d’équivalence biméromorphe.

2. Leurs propriétés géométriques sont les mêmes que celles des variétés (sans structure orbifold géométrique) ayant des invariants analogues.

3. Nombre de ces propriétés sont établies en adaptant (en général sans difficultés majeures) les démonstrations établissant celles des variétés sans structure orbifold géométrique. Pour certaines propriétés cependant, l’adap-

tation semble requérir des idées nouvelles. Des exemples de propriétés pour lesquelles l'adaptation n'est cependant pas immédiate sont : celles des courbes rationnelles orbifoldes, ou celles (de finitude ou d'abélianité) du groupe fondamental des orbifoldes géométriques qui sont soit Fano, soit à fibré canonique trivial.

4. L'origine des orbifoldes géométriques (l'élimination virtuelle des fibres multiples en codimension 1) conduit naturellement à les considérer comme des objets géométriques. Le LMMP (programme des Log-modèles minimaux), qui considère ces mêmes objets pour des raisons apparemment différentes (la possibilité de faire des récurrences sur la dimension par extraction de diviseurs à partir de "centres Log-canoniques"), ne les munit au contraire que d'un seul invariant : le fibré canonique $K_X + \Delta$, considéré pour ses propriétés numériques d'intersection.

□ Si $(X|\Delta)$ est une orbifolde géométrique, on définit (voir [Ca04], les définitions détaillées sont aussi données ci-dessous, dans les chapitres correspondants) :

1. Son fibré canonique $K_{X|\Delta} := K_X + \Delta$: c'est un \mathbb{Q} -diviseur sur X .
2. Sa dimension canonique (ou de Kodaira³) : $\kappa(X|\Delta) := \kappa(X, K_X + \Delta) \geq \kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim(X)\}$, lorsque X est compacte et irréductible.

On dira que $(X|\Delta)$ est **de type général** si $\kappa(X|\Delta) = \dim(X) > 0$.

3. On définira aussi des faisceaux de formes (pluri)-différentielles et, plus généralement, de tenseurs holomorphes de tous les types sur une orbifolde géométrique lisse. (Voir §2.4 et §2.5 ci-dessous).

4. La notion de courbe Δ -rationnelle (en trois versions).

□ Lorsque $(X|\Delta)$ est, de plus, entière, on définit aussi :

5. Son groupe fondamental $\pi_1(X|\Delta)$ et son revêtement universel (voir [Ca04] et le §11 ci-dessous).

6. Sa pseudométrie de Kobayashi $d_{X|\Delta}$ (voir [Ca04] et le §12.3 ci-dessous).

7. Ses points entiers sur un corps de nombres, pour un modèle donné. (Voir [Ca05], et le §12.5 ci-dessous).

8. La notion d'orbifolde géométrique peut naturellement être définie en géométrie algébrique sur d'autres corps que \mathbb{C} . Un cas intéressant est celui

³Habituellement appelée "dimension de Kodaira", elle est en fait introduite pour les surfaces dans le livre de Shafarevitch et al. sur la classification des surfaces projectives, et en général par S. Iitaka et B. Moishezon (dont nous suivons la terminologie). K. Kodaira ne l'a utilisée qu'en 1975, alors qu'elle était déjà d'usage courant.

des corps de fonctions (méromorphes sur une courbe projective définie sur \mathbb{C} ou sur un corps fini). Voir [Ca01] ou le §12.4 ci-dessous.

2.3 Morphismes orbifoldes.

La définition suivante est la contribution principale du présent texte :

Definition 2.3 Soit $f : Y \rightarrow X$ une application holomorphe entre espaces analytiques complexes normaux, et Δ_Y, Δ_X des diviseurs orbifoldes sur Y, X respectivement. On note ici m_Y, m_X les multiplicités orbifoldes associées. On dit que f induit un **morphisme orbifolde** (noté alors $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$) si :

1. $f(Y)$ n'est pas contenu dans $[\Delta_X]$.
2. X est \mathbb{Q} -factorielle au sens algébrique (ie : tout diviseur de Weil irréductible sur X est \mathbb{Q} -Cartier).
3. pour tout $D \in W(X)$, et tout $E \in W(Y)$, on a : $t.m_Y(E) \geq m_X(D)$, si $t > 0$, où : $t = t_{E,D} \in \mathbb{Q}^+$ est tel que $f^*(D) = t_{E,D}.E + R$, avec R un diviseur effectif de Y ne contenant pas E .

Definition 2.4 Dans l'étude du groupe fondamental orbifolde (défini seulement pour les orbifoldes géométriques entières, voir §11), et aussi pour la notion de courbe Δ -rationnelle (voir §5), nous utiliserons une notion plus restrictive de morphisme orbifolde, celle de **morphisme orbifolde divisible** : il s'agit d'un morphisme orbifolde dans le sens précédent, mais satisfaisant la variante "multiplicités divisibles" : $m_X(D)$ **divise** $t.m_Y(E)$ ⁴, pour tous D, E comme dans la condition 3 ci-dessus. (Par convention, $+\infty$ est multiple de tout entier $m > 0$, et ne divise que lui-même).

Pour distinguer ces deux types de morphismes, nous appellerons "morphisms non-classiques" ceux définis en 2.3 ci-dessus, et "morphisms classiques", ou "divisibles" ceux définis ici.

On notera $\text{Georb}^{\mathbb{Q}}$ la catégorie des orbifoldes géométriques \mathbb{Q} -factorielles munie des morphismes non-classiques, et $\text{Georb}^{\mathbb{Z}}$ sa sous-catégorie pleine constituée des orbifoldes entières. On notera en fin $\text{Georb}^{\text{div}}$ la catégorie des orbifoldes géométriques \mathbb{Q} -factorielles entières munie des morphismes "classiques" (ou "divisibles").

⁴Au lieu de : $t.m_Y(E) \geq m_X(D)$.

Pour indiquer qu'un morphisme orbifold $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ appartient à l'une de ces trois catégories, on le notera : $f : (Y|\Delta_Y)^* \rightarrow (X|\Delta_X)^*$, avec $*$ = div, Z, Q selon le cas.

Remarque 2.5

0. Les motivations pour la condition 3. de la définition 2.3 précédente sont multiples, bien que peu évidentes a priori : tout d'abord, cette condition est exactement celle qui préserve les faisceaux de formes pluri-différentielles (voir proposition 2.10), ainsi que les morphismes du disque unité pour les orbifolles géométriques entières (voir proposition 2.7).

Enfin, une motivation géométrique plus directe (dans le cas divisible) est la compatibilité avec la composition des fibrations : soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fibrations entre variétés complexes projectives normales. On suppose f et g à fibres équidimensionnelles pour simplifier.

Soit D un diviseur de Weil sur Z . Alors la multiplicité de la fibre de $(g \circ f)$ au-dessus du point générique de D est le pgcd, noté $\mu(D)$, des $t_j \cdot m_j$ si $g^*(D) = \sum_j t_j \cdot (E_j)$, où $m_j = \text{pgcd}(s_{ij})$, avec : $f^*(E_j) = \sum_i s_{ij} \cdot F_{ij}$. (Les entiers t_j, s_{ij} sont bien définis au-dessus des points génériques de D, E_j , puisque f, g sont à fibres équidimensionnelles, de sorte que tous les E_j ont pour image D). Les m_j sont donc simplement les multiplicités usuelles des fibres de f au-dessus des points génériques des E_j .

Si l'on définit une orbifolde géométrique $(Y|\Delta_f)$ sur Y en posant : $m_{\Delta_f}(E_j) := m_j$ pour tout diviseur de Weil E_j sur Y comme ci-dessus, et une orbifolde géométrique $(Z|\Delta_{g \circ f})$ en posant $m_{\Delta_{g \circ f}}(D) := \mu(D)$, pour tout $E \subset Z$, alors : pour tout diviseur orbifold Δ_Y sur Y , l'application $g : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (Z|\Delta_{g \circ f})$ est un morphisme orbifold (au sens de 2.3) si et seulement si $\Delta_Y \geq \Delta_f$.

Cette situation sera étudiée en détail aux §3.1 et §3.3.

1. Si $m_X(D) = 1$ et si X est factorielle, la condition 2. est vide (puisque $t > 0$ est entier et $m_Y(E) \geq 1$). Seuls les $D \subset [\Delta_X]$ et E tels que $f(E) \subset [\Delta_X]$ fournissent donc des conditions non vides. Si X et Y sont compacts, les conditions à vérifier sont donc en nombre fini.

2. Si $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ et $g : (Z|\Delta_Z) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ sont des morphismes, le composé $f \circ g$ aussi. La démonstration est immédiate.

3. Si $\Delta_X = \Delta_Y = 0$, toute application holomorphe $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme orbifold. Si $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un morphisme orbifold, et si $\Delta_Y^+ \geq \Delta_Y$, alors $f : (Y|\Delta_Y^+) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un morphisme orbifold.

De même : si $\Delta_X \geq \Delta_X^-$, alors $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X^-)$ est un morphisme orbifold.

4. Si $(X|\Delta_X)$ est logarithmique, alors $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un morphisme orbifold si et seulement si $\Delta_Y \geq f^{-1}(\Delta_X)$.

5. On dit que $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un **morphisme orbifold biméromorphe élémentaire** (ou une **modification orbifold élémentaire**) si c'est un morphisme orbifold, si $f : Y \rightarrow X$ est birationnel, et si $f_*(\Delta_Y) = \Delta_X$. On suppose ici que les deux espaces Y, X considérés sont algébriquement \mathbb{Q} -factoriels. Noter que les trois propriétés sont indépendantes (deux d'entre elles n'impliquent pas la troisième). On dira que deux telles orbifolde géométriques sont **biméromorphiquement équivalentes** s'il existe une chaîne de morphismes orbifolde biméromorphes élémentaires les reliant. De manière équivalente : c'est la relation d'équivalence engendrée par les morphismes orbifold biméromorphes élémentaires.

Voir 2.31 et 2.32 pour des exemples d'équivalences biméromorphes non dominées biméromorphiquement par une troisième.

6. Si $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ et $f' : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta')$ sont des morphismes orbifolde, ils se factorisent par $f^+ : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta^+)$, avec $\Delta^+ := \sup\{\Delta, \Delta'\}$. De même, si $f : (X|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ et $f' : (X|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ sont des morphismes orbifolde, ils se factorisent par $f^- : (X|\Delta^-) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$, avec $\Delta^- := \inf\{\Delta, \Delta'\}$.

7. Si $f : Y \rightarrow (X|\Delta_X)$ est une application holomorphe propre et surjective avec Y et $(X|\Delta_X)$ lisses, et $f^{-1}([\Delta_X])$ à croisement normaux, il existe un élément minimum, noté $f^+(\Delta_X)$, parmi les diviseurs orbifolde Δ_Y sur Y tels que $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ soit un morphisme orbifold. On l'appelle **relèvement de Δ_X à Y** . Pour tout $E \in W(Y)$, la $f^+(\Delta_X)$ -multiplicité de E est $m_Y(E) := \max\{1, \sup_D \{\frac{m(D)}{t_{E,D}}\}\}$, $D \in W(X)$ tel que $f^*(D) = t_{E,D}.E + R$, avec $t_{E,D} > 0$ et R effectif, de support ne contenant pas E .

Si l'on veut des orbifolde entières (resp. et des morphismes divisibles), on doit remplacer $\{\frac{m(D)}{t_{E,D}}\}$ ci-dessus par $\{\lceil \frac{m(D)}{t_{E,D}} \rceil\}$ (resp. par : $\text{ppcm}_D \{\frac{m(D)}{\text{pgcd}\{m(D), t_{E,D}\}}\}$).

On impose la condition $m_Y(E) \geq 1, \forall E \in W(Y)$, puisqu'elle n'est pas toujours satisfaite (par exemple si $f : Y \rightarrow X$ est un revêtement ramifié de courbes projectives, si $\Delta_X = 0$, et si E est un point de ramification de f).

On notera que si $g : Z \rightarrow Y$ est une seconde application holomorphe propre et surjective, alors $(f \circ g)^+(\Delta_X) \leq g^+(f^+(\Delta_X))$, mais que l'on n'a pas égalité, en général.

Par exemple : pour f , éclater la surface X en un point lisse du support (non vide, de dimension 1) de (Δ_X) , puis pour g , éclater l'intersection de la transformée stricte du support de Δ_X avec le diviseur exceptionnel. Si la composante de Δ_X contenant le premier point éclaté est de multiplicité $m \geq 2$, la multiplicité du diviseur exceptionnel du second éclatement dans $(f \circ g)^+(\Delta_X)$ (resp. dans $g^+(f^+(\Delta_X))$) est $m/2$ (resp. m).

Definition 2.6 Soit \mathbb{D} le disque unité de \mathbb{C} , et X lisse. On note $Hol(\mathbb{D}, (X|\Delta_X))$ l'ensemble, muni de la topologie de la convergence compacte, des applications holomorphes $h : \mathbb{D} \rightarrow X$ qui sont des morphismes orbifoldes lorsque \mathbb{D} (resp. X) est muni du diviseur orbifold vide (resp. Δ_X). (voir [C-W05]).

Proposition 2.7 Soit $(Y|\Delta_Y), (X|\Delta_X)$ des orbifolles géométriques, avec Y, X lisses, et $f : Y \rightarrow X$ holomorphe. Alors :

L'application de composition : $f_* : Hol(\mathbb{D}, (Y|\Delta_Y)) \rightarrow Hol(\mathbb{D}, X)$ définie par : $f_*(h) := f \circ h$ a son image contenue dans $Hol(\mathbb{D}, (X|\Delta_X))$ si $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un morphisme (d'orbifolles géométriques). Si $(Y|\Delta_Y)$ est entière, la réciproque est vraie (ie : f est un morphisme orbifold si l'image de f_* est contenue dans $Hol(\mathbb{D}, (X|\Delta_X))$).

Démonstration : Si f est un morphisme d'orbifolles, la remarque 2.2(2) précédente montre que l'image de f_* est contenue dans $Hol(\mathbb{D}, (X|\Delta_X))$. Réciproquement, avec les notations de 2.3, supposons que $f^*(D) = t.E + R$, avec $t > 0$. Supposons que $t.m_Y(E) < m_X(D)$. Soit $y \in E$ un point générique lisse, et $h : \mathbb{D} \rightarrow Y$ holomorphe telle que $h(0) = y$, et que $h^*(E) = m_Y(E). \{0\}$, avec : $(h(\mathbb{D}) \cap [\Delta_Y]) = \{0\}$. (On peut réaliser ces conditions en restreignant suffisamment \mathbb{D} , puisque $(Y|\Delta_Y)$ est entière). Alors : $(f \circ h)^*(D) = t.h^*(E) + h^*(R) = t.m_Y(E). \{0\}$. Puisque $t.m_Y(E) < m_X(D)$, f n'est donc pas un morphisme d'orbifolles \square

2.4 Faisceaux de formes différentielles sur les orbifolles géométriques lisses.

Notations : Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse (ie : X est lisse, et $[\Delta]$ est à croisements normaux). On note $\Delta = \sum_{h \in H} (1 - \frac{1}{m_h}). D_h = \sum_{h \in H} a_h. D_h$, $[a] = \lfloor a \rfloor$ étant la partie entière du réel a , et $\lceil a \rceil := -\lfloor (-a) \rfloor$

son “arrondi supérieur”. Ici les multiplicités m_j sont donc, soit des rationnels, soit $+\infty$.

Soit $q \geq 0$ un entier, et $\Omega_X^q(\log[\Delta])$ le faisceau des germes de formes différentielles à pôles logarithmiques dans $[\Delta]$.

Nous allons maintenant définir, pour une orbifold géométrique *lisse* $(X|\Delta)$ les faisceaux $S^N(\Omega^q(X|\Delta))$, analogues des faisceaux $Sym^N(\Omega_X^q)$ lorsque $\Delta = 0$.

Localement, dans des coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_p)$ **adaptées à** Δ , c’est-à-dire telles que Δ ait pour équation⁵ : $\prod_{j=1}^p x_j^{(1-\frac{1}{m_j})}$, le faisceau $\Omega_X^q(\log[\Delta])$ admet comme \mathcal{O}_X -module les générateurs : $\frac{dx_J}{x_J}$, pour J partie ordonnée à q éléments de $\{1, \dots, p\}$. On a noté : $\frac{dx_J}{x_J} := \bigwedge_{j \in J} \frac{dx_j}{x_j}$.

On note alors, pour tous les entiers non-négatifs q, N : $S_q^N(X|\Delta) := S^N(\Omega^q(X|\Delta))$ le sous-faisceau analytique cohérent localement libre⁶ de $Sym^N(\Omega_X^q(\log[\Delta]))$ engendré par les éléments :

$$\frac{dx_{(J)}}{x_{(J)}} := x^{[k/m]} \cdot \bigotimes_{l=1}^{l=N} \frac{dx_{J_l}}{x_{J_l}} = x^{[-k.a]} \cdot \bigotimes_{l=1}^{l=N} dx_{J_l}, (J) = (J_1, \dots, J_N)\},$$

définis comme suit :

1. Les J_l sont les parties ordonnées (croissantes) à q éléments de $\{1, \dots, p\}$. Les N -uplets (J_1, \dots, J_N) considérés sont croissants au sens large pour l’ordre lexicographique sur les parties ordonnées à q éléments de $\{1, \dots, p\}$.

2. Pour tout $j = 1, \dots, p$, on note k_j le nombre d’occurrences de j dans la suite J_1, \dots, J_N . (C’est-à-dire que $k_j = \sum_{l=1}^{l=N} k_{j,l}$, où $k_{j,l} = 1$ si $j \in J_l$, et $k_{j,l} = 0$ sinon).

3. On a aussi noté k/m le p -uplet $(k_1/m_1, \dots, k_p/m_p)$, et $[k/m]$ le p -uplet : $([k_1/m_1], \dots, [k_p/m_p])$. Enfin : $x^{[k/m]} := \prod_{j=1}^p x_j^{[k_j/m_j]}$.

4. On a enfin noté $(-k.a)$ le p -uplet $(-k_1.a_1, \dots, -k_p.a_p)$, et $[-k.a]$ le p -uplet : $([-k_1.a_1], \dots, [-k_p.a_p])$. Enfin : $x^{[-k.a]} := \prod_{j=1}^p x_j^{[-k_j.a_j]}$, avec : $a_j := (1 - \frac{1}{m_j})$.

Cette définition est clairement indépendante des cartes adaptées locales utilisées.

⁵symbolique : les m_j sont les Δ -multiplicités des hyperplans de coordonnées.

⁶C’est la propriété cruciale, utilisée constamment dans la suite. Elle permet de négliger les sous-ensembles de codimension 2 ou plus, et donc de ne faire intervenir que le lieu de codimension 1 du diviseur orbifold.

On vérifie alors aisément que l'application naturelle $S_q^N(X|\Delta) \otimes S_M, q(X|\Delta) \rightarrow S_{N+M}, q(X|\Delta)$ est bien définie (ie : prend bien ses valeurs dans le membre de droite).

Remarque 2.8 1. A nouveau, la définition précédente s'applique avec changement mineur au cas où les multiplicités de Δ sont réelles.

2. L'origine des faisceaux $S_q^N(X|\Delta) = S_q^N$ (définis dans [Ca01]) est la suivante, pour les orbifoldes géométriques entières : localement, dans la carte x précédente, $X|\Delta$ a un revêtement universel local $f : Y \rightarrow X$ donné dans la carte $y = (y_1, \dots, y_p)$ par : $f(y) = x = (x_1 =: y_1^{m_1}, \dots, x_p =: y_p^{m_p})^7$.

Lorsque N est suffisamment divisible, $f^*(S_{N,1}) = \text{Sym}^N(\Omega_Y^1)$.

Pour N général, S_q^N est le plus grand sous-faisceau \mathcal{F} de $\text{Sym}^N(\Omega_X(\log(\lceil \Delta \rceil)))$ tel que $f^*(\mathcal{F}) \subset \text{Sym}^N(\Omega_Y^q)$.

3. Ces faisceaux ont été utilisés de manière cruciale dans le cadre de la théorie de Nevanlinna dans [C-P05], avec $p = 2, q = 1$.

4. En général, $S_q^N(X|\Delta)$ contient, mais n'est pas égal à $\text{Sym}^N(\Omega^q(X|\Delta))$.

Exemple 2.9 1. Si $q = \dim(X)$, $S_q^N(X|\Delta) = N.K_X + \sum_{h \in H} \lfloor (N(1 - \frac{1}{m_h})) \rfloor . D_h \rfloor := N.K_X + \lfloor N.\Delta \rfloor := \lfloor N.(K_X + \Delta) \rfloor$. Le \mathbb{Q} -diviseur $K_X + \Delta$ est le fibré canonique de $(X|\Delta)$.

2. Si $\Delta_X = 0$, $S_q^N(X|\Delta) = \text{Sym}^N(\Omega_X^q), \forall N, q$.

3. Si $\Delta = \lceil \Delta \rceil$, alors : $S_q^N(X|\Delta) = \text{Sym}^N(\Omega_X^q(\log(\Delta))), \forall N, q$.

On a bien sûr : $S_q^N(X|\Delta) \subset S_q^N(X|\Delta')$ si $\Delta \leq \Delta'$.

Les faisceaux $S_q^N(X|\Delta)$ interpolent donc, en général, entre $\text{Sym}^N(\Omega_X^q)$ et $\text{Sym}^N(\Omega_X^q(\log(\lceil \Delta \rceil)))$.

4. Soit $(\mathbb{P}^1|D)$ l'orbifold géométrique logarithmique de dimension 1, avec D réduit de support 2 points distincts de \mathbb{P}^1 (par exemple 0 et ∞). Alors les faisceaux $S_{N,1}(\mathbb{P}^1|D)$ sont triviaux, de rang 1. On en déduit que les faisceaux $S_q^N((\mathbb{P}^1|D)^r)$ sont tous triviaux.

Proposition 2.10 Soient $(Y|\Delta_Y)$ et $(X|\Delta_X)$ des orbifoldes géométriques lisses, et $f : Y \rightarrow X$ holomorphe.

1. Si f induit un morphisme d'orbifoldes géométriques, alors $f^*(S_q^N(X|\Delta_X)) \subset S_q^N(Y|\Delta_Y)$ pour tous N, q .

⁷Avec la convention : $x_i = y_i^{+\infty} := \exp(y_i)$, ou encore : $dx_i/x_i = dy_i$, si $m_i = +\infty$.

2. Si $f^*(S_{N,1}(X|\Delta_X)) \subset S_{N,1}(Y|\Delta_Y)$ pour $N = \text{ppcm}_j(\text{num}(m_j))$, avec $\Delta_X = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$, alors f induit un morphisme d'orbifoldes géométriques $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ ⁸.

On a noté $\text{num}(m_j)$ le numérateur u_j de $m_j = \frac{u_j}{v_j}$, si $u_j, v_j \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux.

Démonstration : Les notations sont celles introduites ci-dessus.

Pour 1, il suffit de montrer que, pour tous N, q , $f^*(x^{\lceil k/m \rceil} \cdot \otimes_{l=1}^{l=N} \frac{dx_{J_l}}{x_{J_l}}) \in S_q^N(Y|\Delta_Y)$. Puisque ce dernier faisceau est localement libre, il suffit (Hartogs) de vérifier cette inclusion en codimension un dans Y . Soit donc $E \in W(Y)$ et $b \in E$ un point générique. Soit $y = (y_1, \dots, y_n)$ des coordonnées locales de Y en b telles que E ait pour équation locale $y_1 = 0$. Au voisinage de b , on a donc : $f(y) = (y_1^{t_1} \cdot f_1(y), y_1^{t_2} \cdot f_2(y), \dots, y_1^{t_p} \cdot f_p(y))$, avec $f_j(b) \neq 0$ pour $j \geq 1$. Notre hypothèse est que $t_j \cdot m' \geq m_j$, pour $j = 1, \dots, p$, si $m' := m_{\Delta_Y}(E)$.

Donc : $f^*(\frac{dx_J}{x_J}) = \frac{dy_1}{y_1} \wedge u_J, \forall J$, avec $u_J, \forall J$, une $(q-1)$ -forme holomorphe, si $|J| = q$, et si $t_j \geq 1$ pour un $j \in J$ au moins. Par suite, à des termes holomorphes près : $f^*(x^{\lceil k/m \rceil} \cdot \otimes_{l=1}^{l=N} \frac{dx_{J_l}}{x_{J_l}}) = g(y) \cdot y_1^s \cdot (\otimes_{l=1}^{l=k'} (\frac{dy_1}{y_1} \wedge u_{J_l})) \otimes_{l=k'+1}^{l=N} w_l$, avec g et w_l holomorphes, et $s := \sum_{j=1, \dots, p} t_j \lceil k_j/m_j \rceil$.

On veut montrer que $s \geq \lceil k'/m' \rceil$, où k' est l'entier ci-dessus (nombre d'occurrences de $\frac{dy_1}{y_1}$ dans la forme précédente). On a évidemment : $k' \leq \sum_{j=1}^{j=p} k_j$. Par ailleurs : $t_j \cdot m' \geq m_j, \forall j$, donc : $t_j/m_j \geq 1/m', \forall j$. Donc, pour tout j : $t_j \cdot \lceil k_j/m_j \rceil \geq t_j \cdot k_j/m_j \geq k_j/m'$. Donc : $s = \sum t_j \cdot \lceil k_j/m_j \rceil \geq \sum k_j/m' \geq k'/m'$. Puisque s est entier, on a donc bien : $s \geq \lceil k'/m' \rceil$.

Pour 2, soit E, D, b, t, f comme ci-dessus. On a donc, en particulier : $x_1(f(y)) = y_1^{t_1}$. Donc : $f^*(x_1^{\lceil N/m_1 \rceil} \cdot \frac{dx_1}{x_1}^{\otimes N}) = t_1^N \cdot y_1^{t_1 \lceil N/m_1 \rceil} \cdot (\frac{dy_1}{y_1})^{\otimes N}$. On a, par hypothèse : $t_1 \cdot \lceil N/m_1 \rceil \geq N/m'$. Or, $\text{num}(m_1)$ divise $N = \text{ppcm}(\text{num}(m_j))$, et on a donc : $t_1 \cdot N/m_1 = t_1 \cdot \lceil N/m_1 \rceil \geq N/m'$. C'est précisément (multipliée par N) l'inégalité définissant les morphismes orbifoldes \square

De l'exemple 2.9 on déduit :

Corollaire 2.11 *Si $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un morphisme orbifoldes surjectif et génériquement fini entre orbifoldes géométriques lisses, on a : $(K_Y + \Delta_Y) \geq f^*(K_X + \Delta_X)$ (signifiant que la différence est \mathbb{Q} -effective). En particulier, $\kappa(Y|\Delta_Y) \geq \kappa(X|\Delta_X)$ si Y est compacte et connexe.*

⁸Cette propriété ne subsiste donc pas en général pour les morphismes divisibles entre orbifoldes entières et finies, morphismes considérés dans la théorie des champs algébriques de Deligne-Mumford.

Remarque 2.12 Dans [Ca04, définition 2.40, p. 541], la notion de morphisme était définie seulement à l'aide des fibrés canoniques. Cette notion est trop faible pour étudier la catégorie des orbifolds géométriques dans un cadre biméromorphe.

2.5 Tenseurs holomorphes orbifoldes.

On reprend les hypothèses et notations de la section précédente définissant les faisceaux $S_q^N(X|\Delta)$ sur $(X|\Delta)$ lisse. On va définir plus généralement, de manière entièrement similaire, les faisceaux $T_s^r(X|\Delta)$ de tenseurs holomorphes r -contravariants et s -covariants, muni des opérations de contraction et de tensorisation usuelles. Cette définition est motivée par une question de M. Paŭn.

Dans des coordonnées locales adaptées (x_1, \dots, x_n) , c'est le faisceau $T_s^r(X|\Delta)$ localement libre engendré comme \mathcal{O}_X -module par les :

$$t_v^u := x^{[(h-k).a]}. \bigotimes_{j=1}^{j=s} dx_{v(j)} \bigotimes_{i=1}^{i=r} \partial/\partial x_{u(i)},$$

où $u : [1, r] \rightarrow [1, p]$ et $v : [1, s] \rightarrow [1, p]$ sont des applications quelconques, le p -uplet $[(h-k).a]$ (à valeurs dans \mathbb{Z}) étant défini comme dans la section précédente.

De la définition on déduit les deux propriétés usuelles suivantes :

□ On a une application de tensorisation naturelle :

$$\otimes : T_s^r(X|\Delta) \otimes T_q^p(X|\Delta) \rightarrow T_{s+q}^{r+p}(X|\Delta), \forall p, q, r, s.$$

□ On a une application de contraction naturelle :

$$c : T_{s+p}^{r+p}(X|\Delta) \rightarrow T_s^r(X|\Delta), \forall p, r, s.$$

Remarque 2.13

1. Les faisceaux $T^r(X|\Delta)$ des germes de r -champs de vecteurs tangents à Δ interviennent dans l'étude des déformations de courbes Δ -rationnelles au §5.

2. On pourrait définir de même des espaces de jets sur $(X|\Delta)$ lisse, jets qui interviennent dans l'étude de l'hyperbolicité.

2.6 Dimension canonique d'un faisceau différentiel de rang 1

Notations Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec X **compacte** et connexe, et $N, q \geq 0$, entiers.

Soit $L_N \subset S_q^N(X|\Delta)$ un sous faisceau analytique cohérent de rang 1. On notera $\overline{L_N}^\Delta := {}^9 \overline{L_N} \subset S_q^N(X|\Delta)$ sa saturation dans $S_q^N(X|\Delta)$, saturation qui est par définition le plus grand sous-faisceau analytique cohérent de rang un de $S_q^N(X|\Delta)$ contenant L_N . Ce faisceau est donc sans cotorsion, étant aussi défini comme le noyau du morphisme composé de l'injection de L_N dans $S_q^N(X|\Delta)$ avec le quotient : $(S_q^N(X|\Delta)/L_N)/Torsion$.

Soit maintenant $L \subset \Omega_X^q$ un sous-faisceau analytique cohérent de rang 1, et pour tout $N \geq 0$, soit $L_N \subset S_q^N(X|\Delta)$ l'image de $L^{\otimes N}$ dans $Sym^N(\Omega_X^q) \subset S_q^N(X|\Delta)$, et soit enfin $\overline{L_N} \subset S_q^N(X|\Delta)$ sa saturation dans $S_q^N(X|\Delta)$.

On note : $H^0(X|\Delta, L_N) := H^0(X, \overline{L_N}^\Delta)$: c'est aussi le sous-espace de $H^0(X, S_q^N(X|\Delta))$ constitué des sections dont l'image est contenue dans L_N au point générique de X . On note enfin $p_N(X|\Delta, L) := h^0(X, \overline{L_N})$ sa dimension complexe.

On a des applications naturelles $\overline{L_N} \otimes \overline{L_{N'}} \rightarrow \overline{L_{N+N'}}$, qui induisent au niveau des sections une structure d'anneau gradué sur $R(X|\Delta, L) := \bigoplus_{N \geq 0} H^0(X, \overline{L_N})$.

On notera $\kappa(X|\Delta, L)$ le degré de transcendance sur \mathbb{C} de cet anneau, diminué d'une unité si ce degré est au moins 1 ; si ce degré de transcendance est 0, on notera $\kappa(X|\Delta, L) = -\infty$.

Lemme 2.14 *Si $(X|\Delta)$ est lisse, on a, notant $\Phi_N(X)$ l'application méromorphe induite par le système linéaire complet $\overline{L_N}$:*

$$\kappa((X|\Delta), L) = \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(p_N(X|\Delta, L))}{\log N} \right) = \max_{N > 0} (\dim(\Phi_N(X)))$$

Démonstration : Ces assertions se démontrent comme dans le cas d'un fibré en droites (Voir, par exemple, [U75, theorem 5.10, p. 58]) \square

Definition 2.15 *On appelle $\kappa(X|\Delta, L) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, p := \dim(X)\}$ la Δ -dimension de L .*

⁹Si aucune confusion n'est possible sur Δ

La \mathbb{C} -algèbre $K(X|\Delta, L) := \oplus_{N \geq 0} H^0(X, \overline{L_N})$ est appelée la Δ -algèbre de L .

Lorsque $L = K_X$, on note simplement $K(X|\Delta)$ cette algèbre, appelée l'algèbre canonique de $(X|\Delta)$.

Exemple 2.16 1. Si $q = \dim(X)$, $\kappa(X|\Delta, K_X) = \kappa(X, K_X + \Delta) = \kappa(X|\Delta)$.

2. Soit $(X|\Delta) := (\mathbb{P}^1|D)^r$, $r \geq 1$ l'exemple 4 de 2.9. Pour tout $q \geq 1$ et tout sous-faisceau L de rang 1 de Ω_X^q , on a donc : $\kappa(X|\Delta, L) \leq 0$.

2.7 Invariance biméromorphe de la dimension canonique

Proposition 2.17 Soit $(Y|\Delta')$ et $(X|\Delta)$ des orbifoldes géométriques lisses, X, Y compactes et connexes. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application biméromorphe. On notera $N_0(\Delta)$ le plus petit commun multiple des $\text{num}(m_\Delta(D))$ pour les $D \in W(X)$ tel que $m_\Delta(D)$ soit fini.

On a équivalence entre les deux conditions suivantes :

1. $f : (Y|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire.¹⁰

2. Il existe N , divisible par $N_0(\Delta)$ et $N_0(\Delta')$, tel que $f^*(S_{N,1}(X|\Delta)) \subset S_{N,1}(Y|\Delta')$, et $f_*(S_{N,1}(Y|\Delta')) \subset S_{N,1}(X|\Delta)$.

Démonstration : Si la condition 1. est satisfaite, la première (resp. seconde) des propriétés 2. est satisfaite par 2.10 (resp. par le lemme d'Hartogs, et le fait que $S_{N,1}(X|\Delta)$ est localement libre).

Si la condition 2. est satisfaite, alors f est un morphisme orbifold par la première condition 2. et 2.10. De plus, $f_*(\Delta') = \Delta$ par la seconde condition 2. En effet, cette condition garantit qu'en codimension 1, les multiplicités de Δ coïncident avec celles de Δ' sur les transformés stricts des composantes du support de Δ \square

Théorème 2.18 Soit X, X' lisses compactes et connexes, et $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire entre orbifoldes géométriques lisses. Soit $L \subset \Omega_X^q$ un sous-faisceau cohérent de rang 1, et $L' := u^*(L) \subset \Omega_{X'}^q$. On note, pour tout $N \geq 0$ $u^* : \overline{L_N} \rightarrow \overline{L'_N}$ le morphisme naturel de faisceaux. Alors :

1. $u^* : H^0(X|\Delta, L_N) \rightarrow H^0(X'|\Delta', L'_N)$ est un isomorphisme.

¹⁰ Voir remarque 2.5, (5) ci-dessus pour la définition.

$$2. p_N(X|\Delta, L) = p_N(X'|\Delta', L').$$

$$2. \kappa(X|\Delta, L) = \kappa(X'|\Delta', L').$$

Démonstration : Soit $A \subset X$ le lieu (de codimension 2 au moins) au-dessus duquel u n'est pas un isomorphisme. Soit $r : H^0(X, \overline{L_N}) \rightarrow H^0(X - A, \overline{L_N})$ la restriction. Par Hartogs, c'est un isomorphisme (d'espaces vectoriels complexes). Soit $r' : H^0(X', \overline{L'_N}) \rightarrow H^0(X - A, \overline{L_N})$ la restriction (composée avec u). Elle est injective. Puisque $r' \circ u^* = r$, u^* est un isomorphisme \square

Remarque 2.19 *En général, si L est localement libre, $\kappa(X, L) \leq \kappa(X|\Delta, L)$ et l'inégalité peut-être stricte, le membre de droite dépendant de Δ .*

Exemple 2.20 *Le cas des orbifolles géométriques logarithmiques est simple : si $(X'|D')$ et $(X|D)$ sont des orbifolles géométriques logarithmiques lisses (ie : si X, X' le sont, et D, D' réduites à croisements normaux), ces deux orbifolles géométriques logarithmiques sont biméromorphes si et seulement s'il existe une suite $w_j = u'_j \circ (u_j^{-1}) : X_{j-1} \dashrightarrow X_j$ d'équivalences biméromorphes, pour $j = 1, \dots, m$, telle que $(u_j^{-1}(D_j)) = (u'_j)^{-1}(D_{j-1})$, avec $(X_0|D_0) = (X|D)$, et $(X_m|D_m) = (X'|D')$.*

La condition "croisements normaux" n'est pas superflue : $X = \mathbb{P}^2$, D la réunion de 3 droites concourantes, et $X' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, D' la réunion de 3 fibres de la projection sur le premier facteur, le montrent : la dimension canonique n'est pas même préservée.

Par exemple, les orbifolles géométriques $(X|\Delta) := (\mathbb{P}^1|D_1)^r, r \geq 1$ de l'exemple 4 de 2.9, et $(X'|\Delta') := (\mathbb{P}^r|D_r)$, où D_r est la réunion réduite et à croisements normaux de $(r+1)$ hyperplans projectifs (distincts) sont biméromorphiquement équivalentes. On en déduit que les $S_q^N(X'|\Delta')$ sont aussi tous triviaux, et $\kappa(X'|\Delta', L) \leq 0$ pour tout sous-faisceau L de rang 1 de $\Omega_{\mathbb{P}^r}^q$.

Remarque 2.21 *Si $U = X - D$ est une variété quasi-projective lisse (connexe), avec $(X|D)$ lisse, les propriétés de $(X|D)$ qui sont des invariants biméromorphes sont donc des invariants de U . Tels sont donc $\kappa(X|D)$, $H^0(X, S^N(\Omega^p(X|D)))$, et la classique irrégularité logarithmique $q(U) := H^0(X, \Omega^1(X|D))$.*

2.8 Fibration de Moishezon-Iitaka.

Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse telle que $\kappa(X|\Delta) \geq 0$. On suppose X compacte et connexe. Pour tout entier $m > 0$ tel que $m\Delta$ soit entier et $H^0(X, m(K_X + \Delta))$ soit non nul, on note $\Phi_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{N_m}$ l'application méromorphe associée à ce système linéaire.

Les arguments classiques (voir [U75], par exemple), montrent que pour m assez grand et divisible, cette application est à fibres connexes, indépendantes à biméromorphie près de m , et que ces fibres orbifoldes stables génériques ont $\kappa = 0$, et que la base de cette fibration est de dimension $\kappa(X|\Delta)$.

On la notera $M_{(X|\Delta)} : (X|\Delta) \dashrightarrow M(X|\Delta)$, et on l'appellera la **fibration de Moishezon-Iitaka**¹¹ de $(X|\Delta)$.

On déduit de la démonstration de [U75, theorem 5.10, p. 58] le :

Théorème 2.22 *Si $(X|\Delta)$ est lisse, X compacte et connexe, avec $\kappa(X|\Delta) \geq 0$, et si $g : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire tel que $M_Y := M_{(X|\Delta)} \circ g : Y \rightarrow M(X|\Delta)$ soit holomorphe, alors la fibre générale¹² orbifold $(Y_m|\Delta_m)$ ¹³ de M_Y est de dimension canonique nulle (i.e : $\kappa(Y_m|\Delta_m) = 0$).*

La fibration M peut aussi être caractérisée, avec les mêmes arguments que dans le cas non-orbifold, comme suit : toute fibration $g : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ dont les fibres orbifoldes F générales (voir définition 2.49) satisfont $\kappa(F) = 0$ domine $M_{(X|\Delta_X)}$.

2.9 Invariance étale

Définition 2.23 *Soit $v : (Y'|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta)$ un morphisme orbifold entre orbifoldes géométriques lisses et entières de même dimension q .*

*On dit que v est **étale en codimension 1** s'il existe un sous-ensemble analytique fermé A de codimension au moins 2 de Y tel que, sur le complémentaire de A on ait l'égalité : $v^*(N.(K_Y + \Delta)) = N.(K_{Y'} + \Delta')$, pour un entier N tel que $N.\Delta$ soit entier.*

¹¹Appelée habituellement “fibration d'Iitaka”, bien qu'introduite indépendamment par B. Moishezon au CIM de Nice (1970).

¹²générique si X est projective.

¹³Voir définitions 2.43 et 2.49.

Proposition 2.24 *Soit $v : (Y'|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta)$ un morphisme orbifold divisible entre orbifolde géométriques lisses et entières.*

1. *On a équivalence entre les 3 propriétés (a),(b),(c) suivantes :*

(a) *v est étale en codimension 1.*

(b) *Il existe un fermé analytique $A \subset Y$ de codimension au moins 2 tel que, au-dessus du complémentaire de A dans Y , Δ' **divise exactement** $v^*(\Delta)$ (ie : pour tout $D' \in W(Y)$ rencontrant $(Y' - v^{-1}(A))$), $r(D') := \frac{m_{\Delta}(v(D'))}{m_{\Delta'}(D')}$ est un entier égal à l'ordre de ramification de v au point générique de D').*

(c) *Il existe un revêtement orbifold étale (au sens du §11.3) $u : (\bar{Y}|\bar{\Delta}) \rightarrow (Y|\Delta)$ fini (avec \bar{Y} fini, normal et à singularités quotient), et un morphisme orbifold divisible biméromorphe $\bar{v} : (Y'|\Delta') \rightarrow (\bar{Y}|\bar{\Delta})$ tels que $v = u \circ \bar{v}$.*

2. *De plus, si v est étale en codimension 1, alors pour tout sous faisceau $L \subset \Omega_Y^q$ cohérent de rang 1, $\kappa(Y|\Delta, L) = \kappa(Y'|\Delta', v^*(L))$.*

En particulier : $\kappa(Y|\Delta) = \kappa(Y'|\Delta')$.

Démonstration : Assertion 1 : localement en $b' \in Y' - A'$, $A' := v^{-1}(A)$, quitte à augmenter un peu A de sorte que $\Delta \cap (Y - A)$ soit lisse, on a des coordonnées $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, ainsi que des coordonnées locales $y = (y_1, \dots, y_n)$ en $b := v(b')$ telles que $v(y') = (y_1^r, y_2', \dots, y_n')$, et telles que les équations de Δ en b (resp. Δ' en b') soient : $y_1^{1-\frac{1}{m}}$ (resp. $y_1^{1-\frac{1}{m'}}$). Un calcul immédiat montre alors que les propriétés (a) et (c) sont simultanément vérifiées, ceci si et seulement si : $r.m' = m$. D'où l'équivalence de (a) et (c). La propriété (c) implique (a), en prenant $A := S_{\Delta}$ le lieu singulier du support de Δ . L'implication réciproque s'obtient en prenant pour couple u, \bar{v} la factorisation de Stein du morphisme v , et $\bar{\Delta} := \bar{v}_*(\Delta')$, et en utilisant le fait que les revêtements orbifolde étales sont déterminés par leurs restrictions au-dessus de $X - S_{\Delta}$, qui est localement simplement connexe près de S_{Δ} . Voir §11.3.

Pour démontrer l'assertion 2, on peut supposer que u est un revêtement Galoisien de groupe (fini) G . Si N est grand et suffisamment divisible, alors (par [U75, lemma 5.12]) :

$H^0(Y, \overline{L_N}^{\Delta}) = H^0(\bar{Y}, u^*(\overline{L_N}^{\Delta}))^G = H^0(\bar{Y}|\bar{\Delta}, (\bar{u}^* \bar{L})_N)^G$, puisque les faisceaux considérés sont des sous-faisceaux des faisceaux localement libres $S_q^N(Y|\Delta)$ et $u^*(S_q^N(Y|\Delta))$ auquel on peut donc appliquer (sur Y , aux fonctions symétriques des sections sur \bar{Y}) le prolongement de Hartogs, qui montre que $H^0(\bar{Y}, F) = H^0(\bar{Y} - \bar{A}, \bar{F})$, si $\bar{F} = u^*(F)$ est un sous-faisceau saturé d'un sous-faisceau localement libre sur \bar{Y} provenant aussi de Y , avec : $\bar{A} := u^{-1}(A)$.

On a enfin, par l'égalité précédente : $H^0(Y'|\Delta', v^*(L_N))^G \subset H^0(\bar{Y}|\bar{\Delta}, u^*(L_N)^G$, ce qui suffit à montrer, par [U75, theorem 5.13], que $\kappa(Y'|\Delta', v^*(L)) \leq \kappa(Y|\Delta, L)$, l'inégalité opposée étant évidente \square

2.10 Inégalité de Bogomolov (version orbifolde)

Le théorème suivant est dû à F. Bogomolov ([Bo 78]) lorsque D est vide. Sa démonstration s'étend immédiatement au cas logarithmique, en utilisant le fait, dû à P. Deligne ([De 74]), que les sections de $\Omega_X^p(\log D)$ sont d -fermées.¹⁴ Nous en donnons ci-dessous une version orbifolde générale.

Théorème 2.25 *Soit X une variété Kählérienne compacte et connexe¹⁵, D un diviseur à croisements normaux sur X , et $L \subset \Omega_X^p(\log D)$ un sous-faisceau cohérent de rang 1. Alors :*

- (1) $\kappa(X, L) \leq p$.
- (2) *Si $\kappa(X, L) = p$, alors il existe une (unique) fibration méromorphe $f : X \rightarrow Y$ telle que les saturations dans $\Omega_X^p(\log D)$ de L et de $f^*(K_Y)$ coïncident. (En particulier, $\dim(Y) = p$, et f est la fibration d'Itaka définie par le système linéaire des sections de \bar{L}_m , pour $m > 0$ assez grand, la saturation de $L^{\otimes m}$ étant prise dans $S_{m,p}(X|D) = \text{Sym}^m(\Omega_X^p(\log D))$).*

Démonstration : Elle est identique à celle de [Bo 78] (dans le cas projectif), ou de [Ca 04] (dans le cas Kähler), en utilisant [De 74] au lieu de la classique fermeture des formes différentielles holomorphes de la théorie de Hodge \square

Corollaire 2.26 *Soit X une variété Kählérienne compacte et connexe, et soit Δ un diviseur orbifolde sur X . Soit $L \subset \Omega_X^p$ un sous-faisceau cohérent de rang 1. Alors :*

- (1) $\kappa(X|\Delta, L) \leq p$.
- (2) *Si $\kappa(X|\Delta, L) = p$, alors il existe une (unique, à équivalence biméromorphe près) fibration méromorphe $f : X \rightarrow Y$ telle que L et $f^*(K_Y)$ coïncident au point générique de X . (En particulier, $\dim(Y) = p$, et f est la fibration d'Itaka définie par le système linéaire des sections de \bar{L}_m , pour $m > 0$ assez grand, la saturation de $L^{\otimes m}$ étant prise dans $S_{m,p}(X|\Delta)$).*

¹⁴Cette version logarithmique de [Bo 78] a été observée indépendamment par S. Lu, à la suite de [Ca 01].

¹⁵Ou, plus généralement, biméromorphe à une telle variété.

Démonstration : Soit D le support de Δ . On a, bien sûr : $\kappa(X|\Delta, L) \leq \kappa(X/D, L) \leq p$. D'où (1), par 2.25 (1) ci-dessus, appliqué à L dans $\Omega_X^p(\log D)$. Si on a égalité, on a aussi : $p = \kappa(X|\Delta, L) \leq \kappa(X/D, L) \leq p$. D'où (2), en appliquant de la même façon 2.25 (2) \square

Definition 2.27 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. Un sous-faisceau cohérent $L \subset \Omega_X^p$ de rang 1, pour un $p > 0$, est dit Δ -**Bogomolov** si $\kappa(X|\Delta, L) = p$. Cette propriété ne dépend que de la saturation de L dans Ω_X^p , et de la classe d'équivalence biméromorphe de $(X|\Delta)$.

On note $\text{Bog}(X|\Delta)$ l'ensemble (eventuellement vide) des faisceaux Δ -Bogomolov saturés de X .

Question 2.28 L'ensemble $\text{Bog}(X|\Delta)$ est-il toujours fini ? Cette propriété généraliserait la finitude, due à Kobayashi-Ochiai, de l'ensemble des classes d'équivalence biméromorphes d'applications méromorphes connexes dominantes $X \dashrightarrow Y$ (X fixée, Y variable) avec Y de type général.

2.11 Équivalence biméromorphe.

Rappelons (définition 2.3 (5)) que $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta_X)$ est un **morphisme orbifold biméromorphe élémentaire** si c'est un morphisme orbifold, si $f : Y \rightarrow X$ est birationnel, et si $f_*(\Delta_Y) = \Delta_X$. On suppose ici que Y, X sont \mathbb{Q} -factorielles. Noter que les trois propriétés sont indépendantes (deux d'entre elles n'impliquent pas la troisième).

Definition 2.29 On dira que deux orbifoldes géométriques log-canoniques sont **biméromorphiquement équivalentes** s'il existe une chaîne de morphismes orbifoldes biméromorphes élémentaires les reliant, et tels que chacune des orbifoldes géométriques de cette chaîne soit log-canonique. De manière équivalente : c'est la relation d'équivalence engendrée par les morphismes orbifoldes biméromorphes élémentaires entre orbifoldes géométriques log-canoniques.

Remarque 2.30 Il résulte de la remarque 2.56 que la dimension canonique d'une orbifolde géométrique log-canonique est un invariant birationnel, au sens défini ci-dessus.

L'équivalence biméromorphe dans cette catégorie présente (au moins) une différence notable avec le cas non orbifold géométrique : l'exemple

2.31 ci-dessous montre que deux orbifolles géométriques lisses (projectives) biméromorphiquement équivalentes ne sont pas nécessairement dominées par une troisième qui leur est biméromorphiquement équivalente. Cette différence complique considérablement l'étude de l'équivalence biméromorphe orbifolde.

Exemple 2.31 (transformation de Cremona) Soit $X := \mathbb{P}^2$, et 3 points $a, b, c \in X$ non alignés. On note A, B, C les trois droites projectives de X passant par 2 de ces 3 points. Soit $u : X' \rightarrow X$ l'éclaté de X en les 3 points a, b, c , et A', B', C' les transformées strictes des droites A, B, C dans X' .

On note enfin E, F, G les trois diviseurs irréductibles de u . Alors X' admet une seconde contraction $v : X' \rightarrow Y$ sur $Y \cong \mathbb{P}^2$, qui contracte A', B', C' sur trois points $a', b', c' \in Y$, et E, F, G sur trois droites projectives E', F', G' de $Y \cong \mathbb{P}^2$. ($v \circ u^{-1} : X \dashrightarrow Y$ n'est donc autre que la transformation de Cremona).

On peut munir X' des deux structures orbifoldes géométriques (logarithmiques) :

$$\Delta := (E + F + G) \text{ et } \Delta' := (A' + B' + C').$$

Alors : $u : (X'|\Delta) \rightarrow X$ et $v : (X'|\Delta') \rightarrow Y$ sont des morphismes orbifoldes élémentaires, puisque le support de Δ (resp. Δ') est u -exceptionnel (resp. v -exceptionnel).

De plus, $u : X' = (X'|0) \rightarrow X$ et $v : X' \rightarrow Y$ sont des morphismes orbifoldes élémentaires, par définition même.

Donc, l'identité ensembliste $1_{X'} : (X'|\Delta) \rightarrow X' = (X'|0)$ et $1_{X'} : (X'|\Delta') \rightarrow X'$ sont des morphismes orbifoldes birationnels (non élémentaires).

Par suite, $(X'|\Delta)$ et $(X'|\Delta')$ sont birationnellement équivalentes.

Soit maintenant $\Delta'' := \sup(\Delta, \Delta') = (A' + B' + C' + E + F + G)$: c'est un diviseur orbifolde (logarithmique) sur X' . De plus, $\kappa(X'|\Delta'') = \kappa(X/D) = 0$, si $D := (A + B + C)$. Donc $(X'|\Delta'')$ n'est birationnellement équivalent ni à $(X'|\Delta)$ ni à $(X'|\Delta')$, puisque $\kappa(X'|\Delta) = \kappa(X|0) = -\infty$.

Si l'orbifolde géométrique lisse $(Z|\Delta_Z)$ domine (par des morphismes orbifoldes) $g : (Z|\Delta_Z) \rightarrow (X'|\Delta)$ et $g' : (Z|\Delta_Z) \rightarrow (X'|\Delta')$, elle domine aussi $(X'|\Delta'')$. En effet, on a, ensemblistement $g = g'$. Si $E' \in W(X')$, si $H \in W(Z)$, et si $g^*(E') = t.H + \dots$, avec $t > 0$, on a : $t.m_Z(F) \geq \sup\{m_\Delta(E'), m_{\Delta'}(E')\}$, par hypothèse. Mais c'est justement la conclusion cherchée.

Donc $\kappa(Z|\Delta_Z) \geq \kappa(X'|\Delta'') = 0$, et $(Z|\Delta_Z)$ n'est pas birationnelle à $(X'|\Delta)$.

Exemple 2.32 Transformation élémentaire. *Le phénomène précédent existe aussi pour les orbifolde géométriques à multiplicités (entières) finies.*

Soit B une courbe elliptique, et $b \in B$. Soit $p : X \rightarrow B$ une surface géométriquement réglée. On note $\mathbb{P}^1 \cong F := p^{-1}(b)$ la fibre de p au-dessus de b . Soit $a \in F$ un point arbitraire.

Soit $t : X'' \rightarrow X$ l'éclatement de X en a , F'' la transformée stricte de F dans X'' , et E'' le diviseur exceptionnel de t au-dessus de a . Soit $t' : X'' \rightarrow X'$ la contraction de la (-1) -courbes F'' dans X'' , et $E' \subset X'$ l'image de E'' dans X' par t' . Soit $b' : X' \rightarrow B$ la fibration telle que $p' \circ t' = p \circ t$. Et $E' = (p')^{-1}(b)$.

Soit $m > 1$ un entier. On munit X'' de deux diviseurs orbifolde Δ_i , avec $\Delta_1 := (1 - \frac{1}{m}) \cdot [F'']$, et $\Delta_2 := (1 - \frac{1}{m}) \cdot [E'']$. On a donc :

$$\Delta'' := \sup\{\Delta_1, \Delta_2\} = (1 - \frac{1}{m}) \cdot [E'' + F''].$$

On vérifie immédiatement que Δ_1 et Δ_2 sont biméromorphiquement équivalentes (à $(X'|0)$ et $(X|0)$ respectivement, et donc aussi à $(X''|0)$).

On en déduit que $h^0(X''|\Delta_i, S^N(\Omega^1(X''|\Delta_i))) = 1, \forall N > 0$.

Par ailleurs, $t : (X''|\Delta'') \rightarrow (X|\Delta^+)$ est un morphisme orbifolde élémentaire si $\Delta^+ := (1 - \frac{1}{m}) \cdot [F_1 + F_2]$. D'où l'on déduit que : $h^0(X''|\Delta'', S^N(\Omega^1(X''|\Delta''))) = h^0(B, S^N(\Omega^1(B|\Delta_B))) \cong N \cdot (1 - \frac{1}{m})$, puisque $p : (X''|\Delta'') \rightarrow (B|\Delta_B)$ est un morphisme orbifolde, si $\Delta_B := (1 - \frac{1}{m}) \cdot \{b\}$.

En particulier, $(X''|\Delta'')$ n'est pas biméromorphe à $(X''|\Delta_i)$, puisque l'équivalence biméromorphe préserve les sections de $S^N(\Omega^q)$.

Remarquons que l'on peut faire de tels exemples au-dessus d'une courbe B de genre $g \geq 1$ quelconque, et au-dessus de $B = \mathbb{P}^1$ si on fait des éclatements au-dessus d'un nombre suffisant de points b_i .

Remarque 2.33 *Dans les deux exemples précédents, nous avons deux orbifolde lisses $(X|\Delta_j), j = 1, 2$ birationnellement équivalentes, mais non birationnellement équivalentes à $(X|\Delta^+)$, si $\Delta^+ := \sup\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Observer cependant qu'elles sont birationnellement équivalentes à $(X|\Delta^-)$, si $\Delta^- := \inf\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Cette observation pourrait peut-être permettre de décrire l'équivalence birationnelle orbifolde à l'aide d'une unique relation binaire (égale à la relation d'équivalence qu'elle engendre, en remplaçant X par une modification $g : X' \rightarrow X$, et Δ par Δ' sur X' , minimale adéquate telle que $(X'|\Delta')$ soit birationnelle à $(X_i|\Delta_i), i = 1, 2$). Le principe étant de dominer les X_i , mais de diminuer les Δ_i .*

2.12 Restriction à une sous-variété.

Definition 2.34 Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, et $j : V \rightarrow Y$ l'inclusion d'une sous-variété ¹⁶non contenue dans le support de Δ . Soit $j' : V' \rightarrow V$ une résolution de V , telle que $(j')^{-1}(\text{supp}(\Delta))$ soit un diviseur de V' à croisements normaux. Soit Δ' un diviseur orbifold sur V' , de support contenu dans $(j')^{-1}(\text{supp}(\Delta))$.

L'orbifold géométrique $(V'|\Delta')$ est **une restriction de Δ à V** si $j' : (V'|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta)$ est un morphisme orbifold, et si Δ' est le plus petit diviseur orbifold sur V' tel que j' soit un morphisme orbifold¹⁷.

Exemple 2.35 Un cas particulier est celui dans lequel V est une courbe lisse, et rencontre transversalement en des points lisses le diviseur $\text{Supp}(\Delta)$. Dans ce cas, il existe une restriction Δ_V de Δ à V , obtenue en affectant chacun des points d'intersection de V avec $\text{Supp}(\Delta)$ de la Δ -multiplicité de l'unique composante irréductible de $\text{Supp}(\Delta)$ à laquelle appartient ce point. On a donc simplement : $\Delta_V := j^*(\Delta)$ dans ce cas. On dit alors que Δ est **transverse à V** , et que l'orbifold $(V|\Delta_V)$ est **la restriction transverse de Δ à V** .

Proposition 2.36 Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, et $j : V \rightarrow Y$ l'inclusion d'une sous-variété non contenue dans le support de Δ . Soit $(V'|\Delta_{V'})$ une restriction de Δ à V .

1. Si $u : V'' \rightarrow V'$ est une modification propre telle que $(j' \circ u)^{-1}(\text{supp}(\Delta))$ est à croisements normaux, et si $(V''|\Delta_{V''})$ est la restriction de Δ à V de support V'' , alors $u_*(\Delta_{V''}) = \Delta_{V'}$ (mais u n'est pas un morphisme orbifold en général).

2. Deux restrictions de Δ à V sont égales si V est une courbe. On l'appellera donc la restriction de Δ à V .

Démonstration : Assertion 1. Montrons que $u_*(\Delta_{V''}) = \Delta_{V'}$. Soit donc $F' \in W(V')$ et $E \in W(Y)$ choisi tel que $(j')^*(E) = t.F' + \dots$, avec $t > 0$ et $t.m_{\Delta_{V'}}(F') = m_{\Delta}(E)$, l'égalité résultant de la minimalité de $\Delta_{V'}$. Si $F'' \in W(V'')$ est le transformé strict de F' dans V'' , on a donc : $(j' \circ u)^*(E) = t.F'' + \dots$, et par hypothèse, $t.m_{\Delta_{V''}}(F'') \geq m_{\Delta}(E)$. Donc $m_{\Delta_{V''}}(F'') \geq m_{\Delta_{V'}}(F')$, et

¹⁶ie : un sous-ensemble analytique fermé irréductible.

¹⁷On peut formuler cette notion de restriction de façon analogue pour les morphismes divisibles.

puisque $\Delta_{V''}$ est minimale, on a égalité, puisque $m_{\Delta_{V''}}(F'') := \inf\{m_{\Delta}(E)/t\}$, pour E, t comme ci-dessus. Donc $u_*(\Delta_{V''}) = \Delta_{V'}$.

Assertion 2. Résulte de l'assertion 1 si V est une courbe \square

Dans le cas d'une courbe, on peut calculer comme suit la restriction (par application directe des définitions) :

Proposition 2.37 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse, X compacte connexe, et $f : C \rightarrow X$ un morphisme, birationnel sur son image, d'une courbe lisse et compacte connexe C telle que $V := f(C)$ ne soit pas contenue dans $\text{Supp}(\Delta)$. Alors, pour tout point $a \in C$, la multiplicité de a dans la restriction minimale de Δ à C est $m(a) := \sup_{j \in J(a)} \{\frac{m_j}{t_{j,a}}\}$, si $\Delta := \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}).D_j$, $J(a) := \{j | f(a) \in D_j\}$, et $f^*(D_j) = t_{j,a}. \{a\} + \dots$, pour $j \in J(a)$ ¹⁸.*

On peut également calculer la restriction en situation immergée. Nous traitons le cas d'une courbe.

Théorème 2.38 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse, X compacte. Soit $V \subset X$ une courbe compacte et irréductible non contenue dans $\text{Supp}(\Delta)$. Il existe une modification propre $u : X' \rightarrow X$ telle que les propriétés A et B suivantes soient satisfaites :*

A. le diviseur $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$ est à croisements normaux sur X' , qui est lisse.

B. La transformée stricte V' de V dans X' est lisse, et chacun de ses points d'intersection avec $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$ est un point lisse de ce diviseur (donc contenu dans une unique composante irréductible de $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$) en lequel l'intersection est transversale.

On munira alors X' du diviseur orbifold Δ' minimum tel que $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ soit un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire. On notera que $\text{Supp}(\Delta') \subset u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$. Dans cette situation, on dira que la modification $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est **transverse à V** .

Alors : la restriction (transverse) de Δ' à V' est égale à la restriction de Δ à V .

Démonstration : L'existence de u est une conséquence des théorèmes d'Hironaka. On note : $\Delta := \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}).D_j$. Soit $a \in V'$ un point d'intersection, transversale, avec une unique composante E de $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$. On

¹⁸Dans Georb^{div} , on a : $m(a) := \text{ppcm}_{j \in J(a)} \{\frac{m_j}{\text{pgcd}(m_j, t_{j,a})}\}$.

a donc : $m(E) = \max_{j \in J(E)} \{\frac{m_j}{t_{j,E}}\}$, avec : $J(E) := \{j \text{ tels que : } u(E) \subset D_j\}$, et $u^*(D_j) = t_{j,E}.E + \dots$, pour $j \in J(E)$.

On note : $J(a) := \{j \text{ tels que : } u(a) \in D_j\}$.

On a donc : $J(a) = J(E)$, puisque $u(a) \in u(E) \subset \text{Supp}(\Delta)$.

La multiplicité de a dans la restriction de Δ est : $m(a) := \max_{j \in J(a)} \{\frac{m_j}{s_{a,j}}\}$, tandis que celle de a dans la restriction de Δ' est : $m'(a) := \max_{j \in J(a)} \{\frac{m_j}{t_{j,E}}\}$.

On note $\nu : V' \rightarrow X$ la restriction de u à V' , qui coïncide donc avec l'injection de V dans X composée avec la normalisation de V . On a, pour tout j tel que $\nu(a) \in D_j$, pour les nombres d'intersection locaux en a :

$$s_{a,j} := V'.\nu^*(D_j) = V'.u^*(D_j) = V'.t_{j,E}.E = t_{j,E},$$

par les conditions de transversalité et d'unicité A et B ci-dessus.

L'égalité précédente montre que les deux multiplicités $m(a)$ et $m'(a)$ coïncident donc \square

Remarque 2.39 *La restriction ne commute pas avec l'équivalence biméromorphe. Soit $u : (X'|\Delta) \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifolde biméromorphe élémentaire, et V une courbe lisse rencontrant transversalement le support de Δ . En général, les restrictions de Δ à V et de Δ' à V' ne coïncident pas. (Considérer par exemple $X = \mathbb{P}^2, \Delta = 0, V =$ une droite, et $u : X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement d'un point de V , E le diviseur exceptionnel, $\Delta' := (1 - \frac{1}{m}).E, m > 1$). Même si V est une courbe, et si $v : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifolde biméromorphe, avec Δ' minimale rendant v un morphisme orbifolde, il peut se faire que les restrictions de Δ' à V' et de Δ à V ne coïncident pas (si Δ' n'est pas transverse à V'). Voir l'exemple 5.18.*

2.13 Restriction à une courbe générique d'une famille couvrante.

Definition 2.40 *Soit $(C_t)_{t \in T}$ une famille analytique de courbes complexes compactes de la variété X . On suppose T compact, normal et irréductible, et C_t irréductible et réduite pour $t \in T$ générique. On note $Z \subset T \times X$ le graphe d'incidence (T -propre et T -connexe). On note $p : Z \rightarrow X$ et $q : Z \rightarrow T$, les projections. La famille est dite **couvrante** si p est surjective.*

*La famille est dite **sans point-base** si, pour tout $A \subset X$, analytique fermé de codimension au moins 2, C_t ne rencontre pas A , pour $t \in T$ générique.*

Remarquons que si $(C_t)_{t \in T}$ est comme ci-dessus, il existe une modification $u : X' \rightarrow X$ telle que la famille $(C'_t)_{t \in T}$ de courbes de X' dont le membre générique est la transformée stricte de C_t pour $t \in T$ générique soit sans point-base sur X' . On obtient X' en aplatissant le morphisme propre $p : Z \rightarrow X$, et en prenant pour graphe d'incidence de la famille $(C'_t)_{t \in T}$ la composante principale de $Z \times_X X'$. L'absence de points-base est préservée pour toute famille obtenue sur une modification de X' , que l'on supposera lisse.

Soit alors donné, de plus, un diviseur orbifold Δ sur X , tel que $(X|\Delta)$ soit lisse. On supposera aussi, quitte à modifier X' , que les propriétés suivantes sont satisfaites :

A. le diviseur $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$ est à croisements normaux.

B. Pour $t \in T$ générique, C'_t est lisse, et chacun de ses points d'intersection avec $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$ est un point lisse de ce diviseur (donc contenu dans une unique composante irréductible de $u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$ en lequel l'intersection est transversale.

On munira alors X' du diviseur orbifold Δ' minimum tel que $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ soit un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire.

On notera que $\text{Supp}(\Delta') \subset u^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$, et que la restriction transverse de Δ' à C'_t est bien définie pour $t \in T$ générique (par la condition B de transversalité). On dira que la modification u est **transverse à la famille T** .

Théorème 2.41 Si $(C_t)_{t \in T}$ est une famille analytique de courbes de X comme ci-dessus, si $(X|\Delta)$ est lisse, fixée, et si $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est une modification choisie comme ci-dessus, alors la restriction de Δ' à C'_t coïncide avec la restriction minimale de Δ à C_t (définie comme en 2.36 et 2.37).

Démonstration : C'est une conséquence de 2.38, appliquée au membre générique C'_t de la famille \square

Remarque 2.42 Le résultat précédent et sa démonstration (aux modifications usuelles près) restent valables dans $\text{Georb}^{\text{div}}$.

2.14 Fibres orbifoldes d'une fibration méromorphe.

Définition 2.43 Soit $f : (X|\Delta) \rightarrow Y$ une fibration (propre). On suppose l'orbifold géométrique $(X|\Delta)$ lisse. On définit alors la **fibre générique or-**

bifolde $(X|\Delta)_y := (X_y|\Delta_y)$ comme étant, pour $y \in Y$ générique, la restriction de Δ à $X_y := f^{-1}(y)$. C'est-à-dire que si $\Delta = \sum_{D \in W(X)} (1 - \frac{1}{m_\Delta(D)}) \cdot D$, on a : $\Delta_y := \sum_{D \in W(X)} (1 - \frac{1}{m_\Delta(D)}) \cdot (D \cap X_y)$.

Le théorème de Sard montre alors que $(X_y|\Delta_y)$ est lisse.

Definition 2.44 On dit que f et f' sont (biméromorphiquement) **élémentairement équivalentes** s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (Y'|\Delta') & \xrightarrow{v} & (Y|\Delta) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

dans lequel u, v sont biméromorphes, et v un morphisme orbifold tel que $v_*(\Delta') = \Delta$.

Plus généralement, f et f' sont équivalentes (on note alors : $f \sim f'$) si elles le sont pour la relation d'équivalence engendrée par de tels diagrammes.

Proposition 2.45 Si $f : (X|\Delta) \rightarrow Y$ et $f' : (X'|\Delta') \rightarrow Y'$ sont deux fibrations biméromorphiquement équivalentes, et si $(X|\Delta)$ et $(X'|\Delta')$ sont lisses, leurs fibres orbifoldes génériques correspondantes sont biméromorphiquement équivalentes.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'assertion lorsque f et f' sont élémentairement équivalentes. Dans ce cas, il suffit de choisir $x \in X$ tel que les fibres orbifoldes de f et f' au-dessus de x soient lisses. Alors v induit une équivalence orbifold élémentaire entre ces deux fibres \square

Remarque 2.46 Par contre, si f n'est pas presque-holomorphe¹⁹, la fibre orbifold générique $(X_y|\Delta_{X_y})$ de f n'est pas bien définie, à équivalence orbifold près, et sa dimension canonique dépend en général du modèle biméromorphe $(X|\Delta)$ choisi. Considérons, par exemple, $f : X := \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ la fibration définie par les coniques passant par 4 points $a_j \in \mathbb{P}^2$ en position générale. Les fibres de cette fibration sont donc les coniques de la famille, sans structure orbifold. Si l'on éclate les points a_j , et si l'on dénote par A_j les diviseurs exceptionnels de cet éclatement, alors la fibration $f' : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ obtenue

¹⁹Voir définition 8.16.

est holomorphe. Munissant X' de la structure orbifold $\Delta'_m := \sum_j (1 - \frac{1}{m}) \cdot A_j$, les fibres lisses de f' rencontrent transversalement les A_j , et sont donc munies de la structure orbifold induite consistant en quatre points munis de la multiplicité m , et leur dimension canonique est donc $-\infty$ (resp. 0, resp. 1) si $m = 1$ (resp. $m = 2$, resp. $m \geq 3$). Observer que, pour tout m , $(X|0)$ et $(X'|\Delta'_m)$ sont cependant biméromorphes.

Pour les fibres génériques d'une application méromorphe, nous allons cependant définir une notion de restriction, unique à équivalence biméromorphe près, si $(X|\Delta)$ est fixée (mais cette restriction dépend, à équivalence biméromorphe orbifold près) du choix de $(X|\Delta)$, comme le montre 2.46.

Proposition 2.47 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec X compacte et connexe. Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe surjective à fibres génériques X_y connexes²⁰. On peut alors définir alors la restriction de Δ à X_y comme la restriction de Δ' à la fibre générique de $f' : (X'|\Delta') \rightarrow Y$ si $g : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire tel que $f' := f \circ g$ soit holomorphe. Cette restriction générique est alors bien définie à équivalence biméromorphe orbifold près.*

Démonstration : Soit $g : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire (avec $(X'|\Delta')$ lisse) tel que $f' := f \circ g : X' \rightarrow Y$ soit holomorphe. On note Δ_y la restriction de Δ à X_y (au sens usuel de 2.43). Alors $g_y : (X'_y|\Delta'_y)$ est une restriction de Δ à X_y , minimale si Δ' est minimal rendant g un morphisme orbifold. Il nous suffit donc de montrer que si $v : Y' \rightarrow Y$ est une modification propre, et $h : (X''|\Delta'') \rightarrow (X'|\Delta')$ une modification orbifold biméromorphe élémentaire telle que $f'' := v^{-1} \circ f' \circ h : X'' \rightarrow Y'$ soit holomorphe, alors $(X''_y|\Delta''_y) \rightarrow (X'_y|\Delta'_y)$ est un morphisme orbifold biméromorphe (élémentaire si Δ'' et Δ' sont minimales rendant g et h des morphismes orbifolds. Remarquer que si D''_{\min} est minimal rendant $g \circ h$ un morphisme orbifold, alors $(X''|\Delta'')$ et $(X''|\Delta''_{\min})$ sont biméromorphiquement équivalentes). C'est une vérification immédiate, puisque h^* et r_y commutent, si r_y désigne la restriction des diviseurs au-dessus de X_y \square

²⁰La fibre générique X_y est l'image sur X de la fibre correspondante du graphe de f . Elle est bien définie et indépendante de X, f, Y , à équivalences biméromorphes près.

Remarque 2.48 1. Lorsque f est presque holomorphe (ie : si le lieu d'indetermination de f ne rencontre pas sa fibre générique X_y), alors $(X_y|\Delta_y)$ est déjà une restriction de Δ à X_y (par le théorème de Sard-Bertini).

2. Les notions relatives aux fibres (orbifoldes) se comportent de manière “duale” de celles relatives aux bases (orbifoldes, définies dans le §3 suivant) : les fibrations intéressantes sont celles dont les fibres ont une dimension canonique petite $(0, -\infty)$, ou sont Δ -rationnelles (voir §5), ou celles dont la base est de type général ou du moins de dimension canonique nulle ou positive. Ceci justifie la définition suivante :

Definition 2.49 Soit $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ une fibration méromorphe, avec $(X|\Delta)$ lisse et X compacte et connexe. On dit que la fibre orbifolde générique (notée $(X_y|\Delta_y)$) possède la propriété P **s’il existe une** fibration holomorphe $f' : (X'|\Delta') \rightarrow Y'$ biméromorphiquement équivalente à f (avec, bien sûr, $(X'|\Delta')$ lisse), et dont la fibre orbifolde générique possède la propriété P .

Remarque 2.50 1. Les propriétés P que nous considérerons sont les suivantes : $\kappa = 0$, $\kappa = -\infty$, $\kappa_+ = -\infty$, ou bien : Δ -uniréglée ou Δ -rationnellement connexe, ou encore : être “spéciale”. Voir le §5 et le §7 pour ces six dernières notions.

2. Dans cette situation, il n’est pas toujours vrai que pour les propriétés P précédentes, et pour **tout** modèle biméromorphe holomorphe $f'' : (X''|\Delta'') \rightarrow Y''$ de f les fibres orbifoldes génériques possèdent encore la propriété P . Voir l’exemple 2.46.

3. Cependant, cette propriété P sera préservée sur **tout** modèle biméromorphe pour les trois fibrations fondamentales que nous construirons et considérerons ici :

La fibration de Moishezon-Iitaka (P est : $\kappa = 0$) (voir le théorème 2.22).

Le quotient κ -rationnel (P est : $\kappa_+ = -\infty$). En effet cette fibration est presque-holomorphe (si l’orbifolde considérée est finie). Voir §6.5.

Le “coeur” : (P est : être spéciale). En effet : le “coeur” est toujours presque-holomorphe. Voir le théorème 9.1.

En effet, lorsque $\kappa(f|\Delta) \geq 0$, et si $(X|\Delta)$ est finie, toutes les modèles biméromorphes de $(f|\Delta)$ ont un modèle biméromorphe presque-holomorphe, et les fibres orbifoldes génériques ont donc une classe d’équivalence biméromorphe bien définie. La même conclusion est vraie (sans restriction de finitude si $(f|\Delta)$ est de type général. Voir le §8.4.

2.15 Résolution d'une orbifold géométrique.

On peut définir comme suit la notion de modèle lisse d'une orbifold géométrique arbitraire $(X|\Delta)$, définie sur un espace complexe normal X algébriquement \mathbb{Q} -factoriel, c'est-à-dire tel que tout diviseur de Weil sur X soit \mathbb{Q} -Cartier. On note $Sing(X)$ le lieu singulier de X .

Soit $\Delta = \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}).D_j$ un diviseur orbifold de X de support D , où $m_j \in (\mathbb{Q} \cup \infty), \forall j$.

Definition 2.51 Une **résolution** $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ de l'orbifold géométrique $(X|\Delta)$ est une désingularisation $p : Y \rightarrow X$ de X telle que $p^{-1}(D \cup Sing(X))$ soit un diviseur à croisements normaux sur Y , et $(Y|\Delta_Y)$ une orbifold géométrique lisse de Y de support contenu dans $p^{-1}(D \cup Sing(X))$, telle que :

1. $p_*(\Delta_Y) = \Delta$, et :
2. $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ soit un morphisme orbifold ²¹.

Remarque 2.52

1. Si $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ et $p : (Z|\Delta_Z) \rightarrow (X|\Delta)$ sont deux telles résolutions, et si $u : V \rightarrow Y$ et $v : V \rightarrow Z$ sont biméromorphes (propres), , telles que les images réciproques de $(D \cup Sing(X))$ par $p \circ u$ et $p \circ v$ soient des diviseurs à croisements normaux, il existe alors une plus petite orbifold géométrique Δ_V sur V telle que $u : (V|\Delta_V) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ et $v : (V|\Delta_V) \rightarrow (Z|\Delta_Z)$ soient des morphismes orbifoldes biméromorphes, de sorte que $p \circ u : (V|\Delta_V) \rightarrow (X|\Delta)$ et $p \circ v : (V|\Delta_V) \rightarrow (X|\Delta)$ sont aussi des résolutions. En général, u et v ne sont pas des morphismes biméromorphes élémentaires, et il n'est donc pas évident que $(Y|\Delta_Y)$ et $(Z|\Delta_Z)$ soient biméromorphiquement équivalentes (dans la classe des orbifoldes géométriques lisses). Voir cependant la question 2.53 ci-dessous.

2. Lorsque X n'est pas \mathbb{Q} -factorielle, la notion de résolution d'une orbifold géométrique n'est pas définie ici (et il ne semble pas immédiat d'en donner une définition naturelle). La situation est donc, ici encore, analogue à celle des résolutions logarithmiques du programme des (Log) modèles minimaux.

3. La notion de résolution définie ici sera utilisée pour définir les orbifoldes l.c ou klt.

²¹au sens divisible si l'on est dans $Georb^{div}$.

Question 2.53 Soit $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ une résolution d'une orbifold géométrique, avec X \mathbb{Q} -factorielle.

Pour tous $N > 0, q > 0$, le faisceau $S^N(\Omega^q(X|\Delta)) := p_*(S^N(\Omega^q(Y|\Delta_Y)))$ est-il indépendant de la résolution p ?

Si oui, alors : $p^*(H^0(X, S^N(\Omega^q(X|\Delta)))) = H^0(Y, (S^N(\Omega^q(Y|\Delta_Y))))$ est indépendant de la résolution choisie, pour tous N, q .

2.16 Orbifolde géométriques log-canoniques et klt

Ces notions sont définies comme dans le cadre du PMML (=LMMP en Anglais), avec la condition additionnelle de \mathbb{Q} -factorialité. Il est crucial de pouvoir étendre à ce cadre élargi les résultats du présent texte.

Definition 2.54

• L'orbifold géométrique $(X|\Delta)$ est dite **log-canonique** si :

1. X est \mathbb{Q} -factorielle.

2. Le faisceau $\omega_X = K_X$ est \mathbb{Q} -Cartier.

3. Pour toute (ie : pour une) résolution $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$, on a : $K_X + \Delta_Y \geq p^*(K_X + \Delta)$.

• L'orbifold géométrique $(X|\Delta)$ est dite **klt** si, pour une (ie : pour toute) résolution $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$, on a : $(K_X + \Delta_Y) - p^*(K_X + \Delta) := E$ est un diviseur effectif supporté sur le diviseur exceptionnel de p tout entier.

Exemple 2.55 Les orbifolde géométriques lisses sont log-canoniques, et klt si les multiplicités sont finies.

Remarque 2.56 Soit $p : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ une résolution d'une orbifold géométrique log-canonique. Alors $p^*(H^0(X, N(K_{(X|\Delta)}))) = H^0(Y, N(K_{(Y|\Delta_Y)}))$ est indépendant de la résolution choisie, pour tous $N > 0$. Ceci résulte de 2.18.

Question 2.57 Supposons que $(X|\Delta)$ soit une orbifold géométrique log-canonique, et que les faisceaux $S^N(\Omega^q(X|\Delta))$ soient biens définis (ie : indépendants de la résolution de $(X|\Delta)$, comme dans 2.53). Les faisceaux $S^N(\Omega^q(X|\Delta))$ sont-ils alors réflexifs ?

Pour $q = n := \dim(X)$, c'est une conséquence de la définition. Lorsque $q = 1$, ou $q = (n - 1)$, et si $N = 1$, une réponse positive est fournie dans [G-K-K].

3 BASE ORBIFOLDE

Nous allons ici définir la base orbifolde d'une fibration, en établir certaines propriétés biméromorphes et calculer celle d'une composée. Les résultats sont établis et énoncés dans la catégorie $Georb^Q$ (voir 3.2 ci-dessous), mais restent valables, ainsi que leurs démonstrations (en y remplaçant inégalité par divisibilité), dans $Georb^{div}$.

3.1 Base orbifolde d'un morphisme

Definition 3.1 *On appellera **morphisme** toute application $f : Y \rightarrow X$, holomorphe propre et surjective, entre espaces analytiques complexes Y, X normaux. Une **fibration** est un morphisme à fibres connexes.*

Soit $\Delta_Y := \Delta$ un diviseur orbifolde sur Y .

On note $m(\Delta_Y) : W(Y) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\} := \bar{\mathbb{Q}}$ la multiplicité de Δ_Y .

Si $D \in W(X)$, et si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme, on écrit : $f^*(D) = \sum_{j \in J(f,D)} m_j \cdot D_j + R$, où R est le plus grand diviseur de X de support contenu dans $f^*(D)$, et f -exceptionnel (ie : tel que la codimension de $f_*(R)$ dans Y soit au moins 2). Remarquer que les entiers m_j sont bien définis, même si X n'est pas \mathbb{Q} -factorielle.

Definition 3.2 (Voir [Ca04, 1.29, p. 523]) *Soit $(Y|\Delta_Y)$ une orbifolde géométrique. La **base orbifolde** $(X|\Delta(f, \Delta_Y))$ du morphisme $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow X$ est l'orbifolde géométrique $(X|\Delta(f, \Delta_Y))$ définie par la multiplicité $m(f, \Delta_Y) : W(X) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ telle que, pour tout $D \in W(X)$: $m(f, \Delta_Y; D) := \inf_{j \in J(f,D)} \{m_j \cdot m_{\Delta_Y}(E_j)\}$.*

Lorsque $\Delta_Y = 0$, $\Delta(f, 0)$ est simplement notée $\Delta(f)$.

La définition précédente est celle des catégories $Georb^Q$ et $Georb^Z$ (voir définition 2.4).

Dans $Georb^{div}$, on remplace :

$m(f, \Delta_Y; D) := \inf_{j \in J(f,D)} \{m_j \cdot m_{\Delta_Y}(E_j)\}$ ci-dessus par :

$m(f, \Delta_Y; D) := \text{pgcd}_{j \in J(f,D)} \{m_j \cdot m_{\Delta_Y}(E_j)\}$.

On précisera si nécessaire la catégorie considérée en notant : $(X|\Delta(f, \Delta_Y))^*$, ou : $\Delta(f, \Delta_Y))^*$, avec : $*$ = Z, Q, div selon le cas.

Remarque 3.3

1. Même si X et $(Y|\Delta_Y)$ sont lisses, $(X|\Delta(f, \Delta_Y))$ n'est pas lisse, en général.

2. Si $f : (Y|\Delta) \rightarrow (X|\Delta')$ est un morphisme orbifold, on a $\Delta' \leq \Delta(f, \Delta)$. En général, si X est lisse, $f : (Y|\Delta) \rightarrow (X|\Delta(f, \Delta))$ n'est pas un morphisme orbifold (à cause des diviseurs f -exceptionnels de Y , négligés dans la définition de $\Delta(f, \Delta_Y)$). Si f est un morphisme fini, c'est cependant le cas (ceci résulte de 3.13, assertion 2, ci-dessous). On peut toujours, en augmentant les multiplicités des diviseurs f -exceptionnels, faire de $f : (Y|\Delta_Y^+) \rightarrow (X|\Delta(f, \Delta))$ un morphisme orbifold sans changer $\Delta(f, \Delta)$.

3. Si X est une courbe (lisse), $f : (Y|\Delta)^* \rightarrow (X|\Delta(f, \Delta_Y)^*)$ est un morphisme dans la catégorie Georb^* , avec $*$ = Z, Q, div , puisqu'il n'y a alors pas de diviseur f -exceptionnel. Dans ce cas, $(X|\Delta(f, \Delta_Y)^*)$ est aussi la plus grande structure orbifold sur X rendant f un morphisme dans la catégorie Georb^* .

4. Si $f = g \circ h$, avec $h : Y \rightarrow X'$ une fibration, et $g : X' \rightarrow X$ finie (donc $g \circ h$ est la factorisation de Stein du morphisme f), alors $\Delta(f, \Delta) = \Delta(g, \Delta(h, \Delta))$ peut être calculée en 2 étapes. (Ceci résulte aussi de 3.13 ci-dessous). Si g n'est pas finie, on a seulement $\Delta(f, \Delta) \geq \Delta(g, \Delta(h, \Delta))$. Voir ci-dessous pour les cas d'égalité.

5. La définition 3.2 est motivée, entre autres, par la propriété suivante ([Ca04, 1.30]) : si $\Delta_Y = \Delta(g)$, pour une fibration $g : Z \rightarrow Y$, alors $\Delta(f, \Delta_Y) = \Delta(f, \Delta(g)) \geq \Delta(f \circ g)$, la différence provenant des diviseurs de Z qui sont g -exceptionnels, mais non $f \circ g$ -exceptionnels. Sur des modifications adéquates de Z, X et Y , on obtient ([Ca04, 1.31]) des fibrations $g' : Z' \rightarrow Y', f' : Y' \rightarrow X'$ telles que $\Delta(f' \circ g') = \Delta(f', \Delta(g'))$.

Nous allons généraliser cette relation au cas où l'on a un diviseur orbifold initial sur Z . Les arguments sont cependant essentiellement les mêmes. Pour cela, quelques résultats préliminaires doivent être établis.

Lemme 3.4 Soit $v, f, f' = f \circ v$ des applications holomorphes, avec $v : (Y'|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta)$ un morphisme orbifold biméromorphe tel que $\Delta = v_*(\Delta')$:

$$\begin{array}{ccc} (Y'|\Delta') & \xrightarrow{v} & (Y|\Delta) \\ & \searrow f' & \downarrow f \\ & & X \end{array}$$

Alors : $\Delta(f, \Delta) = \Delta(f', \Delta')$.

Démonstration : Soit $D \in W(X)$, alors :

$f'^*(D) = v^*(f^*(D)) = v^*(\sum_j m_j \cdot D_j + R) = \sum_j m_j \cdot (v^*(D_j)) + v^*(R) = \sum_j m_j \cdot \overline{D_j} + \sum_{(j,h)} m_j \cdot n_{(j,h)} E_{(j,h)} + v^*(R) = \sum_j m_j \cdot \overline{D_j} + R'$, où $\overline{D_j}$ est le transformé strict de D_j par v . Bien sûr, $v^*(R)$ est f' -exceptionnel.

D'autre part, puisque v est un morphisme orbifold, on a, pour tous (j, h) :

$$n_{(j,h)} \cdot m'(E_{(j,h)}) \geq m(D_j),$$

et donc : $n_{(j,h)} \cdot m_j \cdot m'(E_{(j,h)}) \geq m_j \cdot m(D_j)$. On a noté $m : W(Y) \rightarrow \mathbb{Q}$, et $m' : W'(Y) \rightarrow \mathbb{Q}$ les fonctions de multiplicité associées à Δ et Δ' respectivement.

Puisque $v_*(\Delta') = \Delta$, on a de plus : $m(D_j) = m'(\overline{D_j})$.

Notant m_f et m'_f les multiplicités définissant $\Delta(f, \Delta)$ et $\Delta(f', \Delta')$ respectivement, on a donc :

$$(1) \quad m_f(D) = \inf_j \{m_j \cdot m(D_j)\}$$

tandis que :

$$(2) \quad m'_f(D) = \inf_{(j,h)} \{m_j \cdot m'(\overline{D_j}), m_j \cdot n_{(j,h)} \cdot m'(E_{(j,h)})\}$$

On déduit alors des relations (1) et (2) précédentes que $m_f(D) = m'_f(D)$, ce qui est l'assertion du lemme \square

Corollaire 3.5 *Dans la situation du lemme 3.4 précédent, si $h : X \rightarrow W$ est une application holomorphe, avec W lisse, alors $\Delta(h \circ f', \Delta') = \Delta(h \circ f, \Delta)$ est indépendant de Δ' , avec $\Delta = v_*(\Delta')$, v étant un morphisme d'orbifoldes géométriques.*

Lemme 3.6 *Supposons que, dans le diagramme commutatif suivant, w et g soient des morphismes orbifold, que w et v soient biméromorphes, et que les variétés considérées soient \mathbb{Q} -factorielles, connexes et compactes.*

$$\begin{array}{ccc} (Z'|\Delta') & \xrightarrow{w} & (Z|\Delta) \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

Alors : $v : (Y'|\Delta(g', \Delta')) \rightarrow (Y|\Delta(g, \Delta))$ est un morphisme orbifold. De plus, si $w_(\Delta') = \Delta$, alors $v_*(\Delta(g', \Delta')) = \Delta(g, \Delta)$.*

Démonstration : Soit $E \in W(Y)$, $E' \in W(Y')$ tels que : $v^*(E) = s \cdot E' + \dots$, avec $s \geq 1$.

On veut montrer que $s.m'_g(E') \geq m_g(E)$, si m_g, m'_g désignent les fonctions de multiplicité associées à $\Delta(g, \Delta)$ et $\Delta(g', \Delta')$ respectivement. De même, m, m' sont celles de Δ et Δ' .

Si $g'^*(E') = \sum_j m_j.F'_j + R'$, on a : $m'_g(E') := \inf_j \{m_j.m'(F'_j)\}$.

On choisit et fixe un j tel que $g'(F'_j) = E'$ et $m_j.m'(F'_j) = m'_g(E')$. On a donc :

$$(1) \quad (v \circ g')^*(E) = (g')^*(s.E' + \dots) = s.m_j.F'_j + \dots,$$

puisque E' est la seule composante irréductible de $v^*(E)$ contenant $g'(F'_j)$.

Si $g^*(E) = \sum_{k \in K} n_k.F_k$, on a donc : $m_g(E) = \inf_k \{n_k.m(F_k)\}$, puisque g est un morphisme orbifold, par hypothèse.

Posant : $w^*(F_k) = s_{(j,k)}.F'_j + \dots$, on déduit de (1), en calculant la multiplicité de F'_j dans $(g \circ w)^*(E)$, utilisant $g \circ w = v \circ g'$ et le fait que w est un morphisme orbifold :

$$(2) \quad s.m_j \geq n_k.s_{(j,k)}, \forall k$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$s.m'_g(E') = s.m_j.m'(F'_j) \geq n_k.s_{(j,k)}.m'(F'_j) \geq n_k.m(F_k) \geq m_g(E),$$

et donc la conclusion : $s.m'_g(E') \geq m_g(E)$ par application directe des définitions; l'avant-dernière inégalité résultant du fait que w est un morphisme orbifold.

La seconde assertion résulte du lemme 3.4 \square

Remarque 3.7 *La condition “ g morphisme orbifold” est essentielle. Elle ne peut être affaiblie en : “ g' morphisme orbifold”.*

3.2 Fibrations nettes.

Definition 3.8 *Soit $g : (Z|\Delta) \rightarrow Y$ une fibration, avec $(Z|\Delta)$ et Y lisses. On dira que g est **nette** (relativement à w) s'il existe un diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} (Z|\Delta) & \xrightarrow{w} & (Z'|\Delta') \\ g \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

dans lequel :

1. w est un morphisme orbifold, v et w sont biméromorphes, Z', Y, Y' lisses, et $w_*(\Delta) = \Delta'$.

2. Tout diviseur g -exceptionnel de Z est w -exceptionnel.

On dira que g est **nette** si elle est nette relativement à une fibration g' comme ci-dessus.

On dira que g est **nette et haute** si elle est nette, et si $g : (Z|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta(g, \Delta))$ est un morphisme orbifold.

On dira que g est **strictement nette** si elle est nette, et si, de plus, sa base orbifold est lisse.

Exemple 3.9 Toute fibration sur une courbe est strictement nette et haute.

Proposition 3.10 Si $g' : (Z'|\Delta') \rightarrow Y'$ est donnée, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (Z|\Delta) & \xrightarrow{w} & (Z'|\Delta') \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y & \xrightarrow{v} & Y' \end{array}$$

tel que :

1. $g : (Z|\Delta) \rightarrow Y$ est strictement nette relativement à w .

2. $g : (Z|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta(g, \Delta))$ est un morphisme orbifold (ie : g est strictement nette et haute).

Démonstration : On construit le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{w_1} & Z_1 & \xrightarrow{w'} & (Z'|\Delta') \\ & \searrow g & \downarrow g_1 & & \downarrow g' \\ & & Y & \xrightarrow{v} & Y' \end{array}$$

dans lequel : v est une modification telle que le morphisme déduit de g' par v soit plat sur la composante principale ([R72]), et tel que Y soit lisse, avec $v^{-1}(\text{Supp}(\Delta(g', \Delta')))$ soit à croisements normaux sur Y . La désingularisation de Z_1 fournit alors Z . On pose : $w := w' \circ w_1$. Les diviseurs g -exceptionnels de Z sont alors w -exceptionnels, par platitude de g_1 . On munit Z du diviseur orbifold Δ tel que $w_*(\Delta) = \Delta'$. Pour les diviseurs $F \in W(Z)$ qui sont w -exceptionnels, leurs multiplicité peut être choisie arbitrairement assez grande. Ceci établit la première assertion.

La seconde assertion résulte de 3.6, si les multiplicités des diviseurs g -exceptionnels de Z (qui sont donc w -exceptionnels) sont choisies assez grandes \square

Du lemme 3.6, on déduit :

Corollaire 3.11 *Supposons que, dans le diagramme commutatif suivant, w soit un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire, et que g soit une fibration haute et strictement nette, et enfin que v soit biméromorphe.*

$$\begin{array}{ccc} (Z'|\Delta') & \xrightarrow{w} & (Z|\Delta) \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

Alors : $v : (Y'|\Delta(g', \Delta')) \rightarrow (Y|\Delta(g, \Delta))$ est un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire.

En particulier, la classe d'équivalence biméromorphe des bases orbifoldes de fibrations équivalentes pour la relation d'équivalence engendrée par de tels diagrammes est bien définie (ie : est indépendante du représentant choisi).

Question 3.12 : Équivalence biméromorphe des bases orbifoldes.

Soit $(Z|\Delta)$ et $(Z'|\Delta')$ deux orbifoldes lisses biméromorphiquement équivalentes, avec Z, Z' compactes, kähler et connexes. Si $g : Z \rightarrow Y$ et $g' : Z' \rightarrow Y'$ sont deux fibrations biméromorphiquement équivalentes (ie : avec la même famille de fibres génériques), avec Y, Y' lisses, et si g et g' sont strictement nettes, leurs bases orbifoldes sont-elles biméromorphiquement équivalentes ?

Nous établirons dans le chapitre §4 suivant une propriété plus faible, mais centrale pour les résultats du présent texte : l'égalité de la dimension canonique de deux telles bases orbifoldes “stables”.

3.3 Composition de fibrations

Dans cette section, toutes les orbifoldes et variétés considérées sont lisses, compactes et connexes.

On considère un diagramme commutatif de morphismes orbifold entre orbifoldes géométriques lisses (compactes et connexes). On suppose que les flèches verticales sont des fibrations.

$$\begin{array}{c}
(Z|\Delta) \\
\downarrow g \\
Y \\
\downarrow f \\
X
\end{array}$$

Proposition 3.13 *Soit $g : Z \rightarrow Y$ et $f : Y \rightarrow X$ deux fibrations, avec Y, X lisses, et Δ un diviseur orbifold sur Z .*

On peut donc construire trois diviseurs orbifolde : $\Delta_Y := \Delta(g, \Delta)$ sur Y , ainsi que $\Delta_{fg} := \Delta(f \circ g, \Delta)$ et $\Delta_{f/g} := \Delta(f, \Delta(g, \Delta))$ sur X . Alors :

1. $\Delta(f \circ g, \Delta) \leq \Delta(f, \Delta(g, \Delta))$.
2. On a $\Delta(f \circ g, \Delta) = \Delta(f, \Delta(g, \Delta))$ si $m_\Delta(F)$ est assez grand, pour tout $F \in W(Z)$ qui est g -exceptionnel, mais non pas $f \circ g$ -exceptionnel.
3. Si $g : (Z|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta(g, \Delta))$ est un morphisme orbifold, on a : $\Delta(f \circ g, \Delta) = \Delta(f, \Delta(g, \Delta))$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que si $F \in W(Z)$ est fg -exceptionnel, ou bien il est g -exceptionnel, ou bien $g(F)$ est f -exceptionnel. Soit alors $D \in W(X)$. Alors $(g^*(f^*))(D) = (\sum_j g^*(m_j E_j) + g^*(R)) = \sum_{j,h} m_j \cdot n_{j,h} F_{j,h} + R'$. Ici R' est fg -exceptionnel, mais aucun des $F_{j,h}$ ne l'est. Notons m_{fg} la multiplicité de $\Delta(f \circ g, \Delta)$, et $m_{f/g}$ celle de $\Delta(f, \Delta(g, \Delta))$.

Donc : $m_{fg}(D) := \inf_{j,h} \{m_j \cdot n_{j,h} \cdot m_\Delta(F_{j,h})\}$. La somme porte sur les composantes $F_{j,h}$ de $(f \circ g)^*(D)$ qui ne sont pas $f \circ g$ -exceptionnelles.

Par définition, $m_{f/g}(D) = \inf_{j,h} \{m_j \cdot n_{j,h} \cdot m_\Delta(F_{j,h})\}$, la somme portant sur les composantes de $(f \circ g)^*(D)$ qui ne sont exceptionnelles ni pour g , ni pour $f \circ g$. D'où la première assertion, puisque $m_{f/g}(D) \geq m_{fg}(D)$.

Pour établir la seconde assertion, il suffit donc d'observer que $m_{fg}(D) = m_{f/g}(D)$. Or, pour chaque F qui est une composante g -exceptionnelle mais non $f \circ g$ -exceptionnelle de $(f \circ g)^*(D)$, on peut choisir : $m_\Delta(F) \geq m_j \cdot n_{j,h} \cdot m_\Delta(F_{j,h})$, pour (au moins) une composante $F_{j,h} = F'$ qui n'est ni g -, ni $f \circ g$ -exceptionnelle, et telle que, de plus, $g(F) \subset g(F') = g(F_{j,h}) = E_j$, avec : $f(E_j) = D$ (et il existe toujours une telle F').

Pour établir la troisième assertion, nous allons, pour tout diviseur $F \in W(Z)$ qui est g -exceptionnel, mais non $f \circ g$ -exceptionnel, montrer l'existence d'un tel diviseur F' , si g est un morphisme orbifold.

Soit donc $D := f(g(F)) \in W(X)$. Soit $E \in W(Y)$ tel que $g^*(E) = t_{E,F} \cdot F + \dots$, avec $t_{E,F} > 0$.

Puisque $g : (Z|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ est un morphisme orbifold, on a :

$$t_{E,F}.m_\Delta(F) \geq m_g(E) := m_{\Delta_Y}(E).$$

De plus, il existe $F' \in W(Z)$ tel que $g(F') = E$, et $t_{E,F'}.m_\Delta(F') = m_g(E)$, avec $g^*(E) = t_{E,F'}.F' + \dots$, par définition de $\Delta_Y = \Delta(g, \Delta)$.

On a donc aussi : $t_{E,F}.m_\Delta(F) \geq t_{E,F'}.m_\Delta(F')$.

Donc $D := f \circ g(F) = f \circ g(F')$. Si $f^*(D) = s.E + \dots$, on a donc : $(f \circ g)^*(D) = s.t_{E,F'}.F' + t^+.F + \dots$, où $t^+ \geq s.t_{E,F}$, puisque $f^*(D)$ peut avoir un support dont plusieurs composantes distinctes contiennent $g(F)$. Il en résulte que $t^+.m_\Delta(F) \geq s.t_{E,F'}.m_\Delta(F') \geq s.m_g(E) \geq m_{f/g}(D)$. Puisque ceci est vrai pour tout $F \in W(Z)$ qui est g -exceptionnel, mais non $f \circ g$ -exceptionnel, on a bien : $m_{f \circ g}(D) \geq m_{f/g}(D), \forall D \in W(X)$. En effet, $m_{f/g}(D)$ est le minimum des quantités $s.t_{E,F'}.m_\Delta(F')$, pour F' tel que $g(F') = E'$, avec $f(E') = D$ \square

De 3.13, on déduit maintenant :

Proposition 3.14 *Soit $g : Z \rightarrow Y$ et $f : Y \rightarrow X$ deux fibrations. Soit Δ un diviseur orbifold sur Z . Si $g : (Z|\Delta) \rightarrow Y$ est nette et haute (ce que l'on peut réaliser par un morphisme biméromorphe élémentaire), alors $\Delta(f \circ g, \Delta) = \Delta(f, \Delta(g, \Delta))$.*

Ce résultat montre que, quitte à effectuer sur $(Z|\Delta)$ une transformation biméromorphe élémentaire, on peut calculer la base orbifold de $f \circ g$ en deux étapes.

De 3.13 et 3.10, on déduit plus généralement, par récurrence sur r :

Proposition 3.15 *Soit $g'_j : Z'_j \dashrightarrow Z'_{j+1}$, pour $j = 0, 1, \dots, r$ des fibrations méromorphes dominantes connexes, avec Z'_0 lisse, compacte et connexe. Soit Δ'_0 un diviseur orbifold sur Z'_0 . Il existe alors un morphisme orbifold biméromorphe élémentaire $w : (Z_0|\Delta_0) \rightarrow (Z'_0|\Delta'_0)$, des applications biméromorphes $w_j : Z_j \rightarrow Z'_j$, et des applications holomorphes $g_j : Z_j \rightarrow Z_{j+1}$ telles que, pour $j = 0, 1, \dots, r$:*

1. $g'_j \circ w_j = w_{j+1} \circ g_j$.
2. $h_j := g_j \circ g_{j-1} \circ \dots \circ g_1 \circ g_0 : Z_0 \rightarrow Z_{j+1}$ est strictement nette et haute.
3. $\Delta(h_j, \Delta_0) = \Delta(g_j, \Delta(h_{j-1}, \Delta_0))$.

4 DIMENSION CANONIQUE D'UNE FIBRATION.

La dimension canonique (“de Kodaira”) de la base orbifold de d’une fibration $f : (X|\Delta) \rightarrow Y$ n’est pas un invariant biméromorphe de $(f|\Delta)$. Nous définissons un invariant biméromorphe de cette fibration (le minimum sur tous les modèles biméromorphes de $(f|\Delta)$), qui coïncide avec le précédent lorsque f est “nette”, et montrons comment calculer cet invariant, à l’aide d’un faisceau différentiel de rang 1, sur tout modèle biméromorphe de $(f|\Delta)$.

4.1 Dimension canonique d’une fibration.

Définition 4.1 Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$ une fibration avec $(Y|\Delta)$ et X lisses. On définit : $L_f := f^*(K_X) \subset \Omega_Y^p$, si $p := \dim(X)$.

Rappelons que l’on a aussi défini dans le lemme 2.14 les invariants suivants :

$$\kappa(Y|\Delta, L_f) := \kappa(f, \Delta), \text{ et } p_N(Y|\Delta, L_f) := p_N(f, \Delta), \forall N > 0.$$

Remarque 4.2 Soit $v : (Y'|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta)$ un morphisme orbifold biméromorphe entre orbifoldes lisses tel que $v_*(\Delta') = \Delta$, et $f' := f \circ v$. Alors il résulte du lemme 3.4 que : $p_N(f', \Delta') = p_N(f, \Delta), \forall N > 0$, et $\kappa(f, \Delta) = \kappa(f', \Delta')$.

L’objectif de cette section est de démontrer le :

Théorème 4.3 Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$ une fibration, avec $(Y|\Delta)$ et X lisses. Alors :

1. $\kappa(Y|\Delta, L_f) \leq \kappa(X|\Delta(f, \Delta))$.
2. Si f est nette, la dernière inégalité est une égalité.

Démonstration : Elle utilise le lemme 4.5 ci-dessous.

Définition 4.4 Soit F un diviseur entier effectif sur Y . On dit que F est **partiellement supporté** sur les fibres de f s’il existe un diviseur effectif D sur X tel que $F \leq f^*(D)$, et tel que pour toute composante irréductible D' de D , il existe une composante irréductible E' de $f^{-1}(D')$ non contenue dans F , et telle que $f(E') = D'$.

On a :

Lemme 4.5 ([Ca04, lemma 1.22]) Soit F un diviseur de Y partiellement supporté sur les fibres de f , et $L \in \text{Pic}(X)$.

Alors l'injection naturelle : $H^0(Y, f^*(L)) \subset H^0(Y, f^*(L) + F)$ est surjective.

Le théorème 4.3 résulte alors de la proposition 4.6 suivante :

Proposition 4.6 Soit $N_0 = N_0(f, \Delta)$ le plus petit commun multiple des numérateurs des multiplicités finies de $\Delta(f, \Delta) := \Delta_f$. Soit $N := N_0.M$, et $\overline{L}_N := \overline{L}_{N_0.M} \subset S_{N,p}(Y|\Delta)$, $\forall M > 0, p := \dim(X)$. Alors :

1. Il existe des diviseurs effectifs (dépendants de M) F, E^+, E^- sur Y tels que : $\overline{L}_N = f^*(N(K_X + \Delta_f) + F + E^+ - E^-)$, et tels que : F soit partiellement supporté sur les fibres de f , E^+ et E^- sont f -exceptionnels et sans composante commune.

2. Si f est nette, il existe un isomorphisme naturel :

$$j_M : H^0(Y, \overline{L}_N) \rightarrow f^*(H^0(X, (N(K_X + \Delta_f)))).$$

Démonstration (de 4.6) :

Assertion 1. Il suffit de voir que, en codimension 1 au-dessus de X , on a : $\overline{L}_N = f^*(N.(K_X + \Delta_f) + F)$, et même seulement que, si $D \in W(X)$, et $E \in W(Y)$ sont tels que $f(E) = D$, alors au-dessus du point générique de D , on a égalité entre ces deux faisceaux (pour un choix convenable de F déterminé ci-dessous).

On note $\Delta_f := \Delta(f, \Delta)$, $m : W(Y) \rightarrow \mathbb{Q}^+$ la multiplicité définissant Δ , et m_f celle définissant Δ_f .

Si $f^*(D) = t.E + \dots$, avec $t > 0$ entier, alors $t.s := t.m(E) \geq m_f(D) := r$, par hypothèse. Dans des coordonnées locales $y = (y_1, \dots, y_n)$ adaptées au voisinage du point $b \in E$, générique dans E , E est défini par l'équation $y_1 = 0$, et $f(y) = (x_1, \dots, x_p) = (y_1^t, f_2, \dots, f_p)$, avec $w'(b) := df_2(b) \wedge \dots \wedge df_p(b) \neq 0$. De plus, D est défini par l'équation $x_1 = 0$. Enfin, Δ (resp. Δ_f) a en b (resp. en $a := f(b)$) pour équation : $y_1^{1-1/s} = 0$ (resp. $x_1^{1-1/r} = 0$ (avec s, r définis ci-dessus, et $s.t \geq r$)).

Un générateur de $N.(K_X + \Delta_f)$ en a est donc : $w := (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p)/x_1^{N-N/r}$. On en déduit que $f^*(w) = y_1^{((t/r)-s)N-N} . (dy_1 \wedge w')^{\otimes N}$, où w' est une $(p-1)$ -forme holomorphe non nulle et sans zéro sur Y près de b . On a, par hypothèse, $t/r \geq 1/s$, avec égalité pour au moins l'une de composantes E de $f^*(D)$. On en déduit bien la première assertion.

Assertion 2. On suppose que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (Y'|\Delta') & \xrightarrow{v} & (Y|\Delta) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont biméromorphes, les orbifolles lisses, et que les diviseurs f' -exceptionnels de Y' sont v -exceptionnels. Donc f' est nette (relativement à f), et on veut montrer l'assertion 2 pour f' (et non pas pour f). On note $m', \Delta'_f = \Delta'_{f'}, F', \dots$ les données relatives à f' qui sont analogues à celles introduites pour f .

Soit $A \subset Y$ le lieu au-dessus duquel v n'est pas un isomorphisme : il est analytique de codimension au moins deux dans Y . Observons tout d'abord que l'on a une injection naturelle de faisceaux $v_*(f'^*(N(K_{X'} + \Delta'_f)) + F') \rightarrow (f'^*(N(K_X + \Delta_f)) + F)$ qui est un isomorphisme au-dessus de $(Y - A)$. Pour tout diviseur v -exceptionnel E' (pas nécessairement effectif) de Y' , on a donc une bijection naturelle : $H^0(Y', N(K_{X'} + \Delta'_f) + F' + E') \cong H^0(Y', N(K_{X'} + \Delta'_f) + F')$, puisque les sections ainsi définies peuvent être vues comme des sections de $f'^*(N(K_X|\Delta_f))$ sur $(Y - A)$, la conclusion résultant du théorème d'Hartogs.

On a donc, en particulier, un isomorphisme : $H^0(Y', f'^*(N(K_{X'} + \Delta'_f) + F')) \cong H^0(Y', f'^*(N(K_{X'} + \Delta'_f)) + F' + E'^+ - E'^-) \cong H^0(Y', \overline{L_{f',N}})$.

Par le lemme 4.5, on a donc : $H^0(Y', f'^*(N(K_{X'} + \Delta'_f)) + F') \cong H^0(Y', f'^*(N(K_{X'} + \Delta'_f))) \cong H^0(Y', \overline{L_{f',N}})$, et la conclusion \square

4.2 Équivalence biméromorphe de fibrations.

Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$, et $f' : (Y'|\Delta') \rightarrow X'$ des fibrations, avec X, Y, X', Y' lisses compactes et connexes.

\square On supposera dans tout ce §4.2 que les orbifolles géométriques $(Y|\Delta)$ et $(Y'|\Delta')$ sont lisses.

Rappelons (2.44) la :

Definition 4.7 On dit que f et f' sont (biméromorphiquement) **élémentairement équivalentes** s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(Y'|\Delta') & \xrightarrow{v} & (Y|\Delta) \\
f' \downarrow & & \downarrow f \\
X' & \xrightarrow{u} & X
\end{array}$$

dans lequel u, v sont biméromorphes, u, v holomorphes, et v un morphisme orbifold tel que $v_*(\Delta') = \Delta$.

Plus généralement, f et f' sont équivalentes (on note alors : $f \sim f'$) si elles le sont pour la relation d'équivalence engendrée par de tels diagrammes.

Remarque 4.8 En général, u n'est pas un morphisme orbifold sur les bases orbifolde de f et f' , même s'il est holomorphe.

Proposition 4.9 Dans le diagramme précédent, on a :

1. $u_*(\Delta(f', \Delta')) = \Delta(f, \Delta)$.
2. $\kappa(X|\Delta(f, \Delta)) \geq \kappa(X'|\Delta(f', \Delta))$
3. On a égalité si $\kappa(X) \geq \kappa(X') \geq 0$

Démonstration : La première assertion résulte du lemme 3.6. La seconde s'ensuit immédiatement. La troisième est établie dans [Ca04, 1.14, p. 514] \square

• La dimension canonique de la base d'une fibration n'est pas, en général, un invariant biméromorphe. On va maintenant attacher à une fibration $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$ comme ci-dessus un invariant biméromorphe (dans la catégorie des orbifolde lisses) fondamental d'une fibration, grâce à la propriété de décroissance ci-dessus.

Définition 4.10 Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$ une fibration avec $(Y|\Delta)$ et X lisses. On définit : $\kappa(X, f|\Delta) := \inf_{f' \sim f} \{\kappa(X'|\Delta(f, \Delta))\}$. C'est la **dimension canonique d'une fibration orbifold**.

Corollaire 4.11 Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$ une fibration, avec $(Y|\Delta)$ et X lisses. Alors :

1. $\kappa((Y|\Delta), L_f) = \kappa((Y'|\Delta'), L_{f'})$ si $f \sim f'$.
2. $\kappa(f|\Delta) = \kappa((Y|\Delta), L_f) \leq \kappa(X|\Delta(f, \Delta))$.
3. Si f est nette, la dernière inégalité est une égalité.

Démonstration : La première assertion résulte de l'invariance biméromorphe de la dimension canonique de (L_f, Δ) , par le théorème 2.18.

Pour l'assertion 2, on choisit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
(Y'|\Delta') & \xrightarrow{v} & (Y|\Delta) \\
f' \downarrow & & \downarrow f \\
X' & \xrightarrow{u} & X
\end{array}$$

comme ci-dessus, avec f' nette relativement à f , f choisie telle que $\kappa(f|\Delta) = \kappa(X|\Delta(f, \Delta)) = \kappa(X'|\Delta(f', \Delta'))$, la première égalité par le choix de f , la seconde par la décroissance 4.9.2 et minimalité de $\kappa(X|\Delta(f, \Delta))$. Puisque f' est nette, on a : $\kappa(X'|\Delta(f', \Delta')) = \kappa((Y'|\Delta'), L_{f'})$, par le théorème 4.3. Puisque $\kappa((Y'|\Delta'), L_{f'}) = \kappa((Y|\Delta), L_f)$, par invariance birationnelle, on a : $\kappa(f|\Delta) = \kappa(X'|\Delta(f', \Delta')) = \kappa((Y'|\Delta'), L_{f'}) = \kappa((Y|\Delta), L_f)$. L'inégalité résulte de ce que $\kappa(X'|\Delta(f', \Delta')) \leq \kappa(X|\Delta(f, \Delta))$, par 4.9

L'assertion 3 n'est autre que 4.11 \square

Corollaire 4.12 *Soit un diagramme commutatif de morphismes orbifoldes :*

$$\begin{array}{ccc}
(Y'|\Delta') & \xrightarrow{v} & (Y|\Delta) \\
f' \downarrow & & \downarrow f \\
X' & \xrightarrow{u} & X
\end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont génériquement finies, les flèches verticales des fibrations, avec : $(Y'|\Delta'), (Y|\Delta), X'$ et X lisses. Alors :

1. $\kappa(f \circ v|\Delta') \geq \kappa(f|\Delta)$
2. *Si v est étale en codimension 1, on a égalité.*

Démonstration : Il suffit, par 4.3 pour l'assertion 1, et 2.24 pour l'assertion 2, de montrer (par unicité de la saturation) que $v^*(L_f) = L_{f'} \subset \Omega_{Y', p}^p := \dim(X)$ au point générique de Y' . Or ceci est évident, puisqu'en un tel point : $v^*(L_f) = (f \circ v)^*(K_X) = f'^*(u^*(K_X)) = f'^*(K_{X'}) \square$

Remarque 4.13 *Les corollaires 4.6 et 4.12 (et leurs démonstrations) subsistent lorsque X', X sont seulement normaux, et f, f' méromorphes, pourvu que l'on définisse $L_f, L_{f'}$ comme les images dans $\Omega_Y^p, \Omega_{Y'}^p$ de fibrés canoniques de modèles lisses arbitraires.*

De 4.3 on déduit que :

Corollaire 4.14 *Si $p := \dim(X)$, si $f \sim f'$ sont comme ci-dessus²², alors $\kappa(f|\Delta) = \kappa(f'|\Delta') := \kappa((Y|\Delta), L_f)$ sont bien définis, où $L_f \subset \Omega_Y^p$ est*

²²Voir la définition 2.44.

cohérent de rang 1, et coïncide avec $f^*(K_X)$ aux points génériques de Y (en lesquels f est régulière).

En particulier, si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration méromorphe dominante, $\kappa(f|\Delta)$ est bien définie, sur tout modèle holomorphe net de f , et est indépendante de ce modèle. On l'appelle la **dimension canonique de f** .

On notera $[Y|\Delta(f|\Delta)]$ la base orbifold de d'une tel modèle biméromorphe strictement net et haut de f . On l'appellera une **base orbifold stable de $(f|\Delta)$** .

La dimension canonique de f est bien définie, même pour les fibrations non presque-holomorphes, bien que la dimension canonique de la fibre orbifold générique ne soit pas un invariant biméromorphe. La propriété suivante justifie partiellement ce fait, puisque les composantes orbifoldes non invariantes biméromorphiquement sont horizontales dans le sens ci-dessous.

Corollaire 4.15 *Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow X$ une fibration holomorphe nette, avec $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse. Soit Δ^{vert} (resp. Δ^{hor}) le diviseur orbifold déduit de Δ par suppression de ses composantes f -horizontales (resp. f -verticales), c'est-à-dire celles qui se projettent surjectivement (resp. ne se projettent pas surjectivement) sur X par f .*

Alors : $\kappa(f|\Delta) = \kappa(f|\Delta^{vert})$.

Démonstration : Par construction, $\Delta(f, \Delta) = \Delta(f, \Delta^{vert})$. Puisque f est nette, $\kappa(f|\Delta) = \kappa(X|\Delta(f, \Delta)) = \kappa(X|\Delta(f, \Delta^{vert})) = \kappa(f|\Delta^{vert}) \square$

4.3 Fibrations de type général et orbifoldes spéciales : définition.

On définit maintenant ces deux notions, utilisées constamment dans la suite.

Definition 4.16 *Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une fibration méromorphe avec X, Y compacts et irréductibles, et $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse. On dit que $(f|\Delta)$ (ou f s'il n'y a pas d'ambiguïté sur Δ) est une **fibration de type général** si $\kappa(f|\Delta) = \dim(X) > 0$.*

Cet ensemble ne dépend donc que de la classe d'équivalence biméromorphe de $(Y|\Delta)$.

Definition 4.17 Une orbifold géométrique lisse $(Y|\Delta)$, avec Y compacte et connexe est dite **spéciale** si :

1. $Y \in \mathcal{C}$ (ie : Y est biméromorphe à une variété Kählérienne compacte).
2. Il n'existe pas de fibration $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ de type général. (De manière équivalente : $(Y|\Delta)$ n'a pas d'application méromorphe dominante "stable" sur une orbifold géométrique de type général de dimension strictement positive. Cette notion se formule donc naturellement dans la catégorie biméromorphe des orbifoldes géométriques).

□ La notion d'orbifold géométrique spéciale est antithétique de celle d'orbifold de type général. Nous verrons ci-dessous en quels sens.

5 COURBES Δ -RATIONNELLES.

Nous introduisons ici les notions de base de la géométrie des courbes rationnelles dans le contexte orbifold (lisse), et posons un certain nombre de questions, analogues orbifold de celles déjà connues ou conjecturées dans le cadre non-orbifold. Nous montrons enfin que lorsque $(X|\Delta) = X'/G$ est un *quotient global* (voir la définition 5.30) ces propriétés peuvent être déduites des résultats connus lorsque $\Delta = 0$. On montre en effet que, dans ce cas très particulier, les courbes rationnelles usuelles de X' et les courbes Δ -rationnelles de X (voir la définition 5.1) se correspondent par images directe et réciproque. On espère pouvoir étendre ces résultats au cas général (où $(X|\Delta)$ est lisse, finie et entière) en remplaçant le revêtement orbifold X' par le champ algébrique lisse de Deligne-Mumford $\mathcal{X} \rightarrow X$ associé à $(X|\Delta)$, et en étendant au cas des champs algébriques de Deligne-Mumford les arguments maintenant classiques de la théorie des courbes rationnelles, grâce au champ algébrique d'Abramovich-Vistoli (construit dans [AV 98]), puisque les courbes rationnelles de \mathcal{X} et les courbes Δ -rationnelles de X se correspondent alors comme dans le cas des “quotients globaux”. La plupart des résultats attendus (hormis le “bend-and-break”) semblent d’ailleurs pouvoir être obtenus directement, grâce aux techniques usuelles de déformation des courbes rationnelles. Voir la remarque 5.9.

5.1 Notion de Δ -courbe rationnelle.

Nous considérerons ici presque exclusivement la version *divisible* de courbe Δ -rationnelle. Les versions Δ^Z et Δ^Q seront définies en 5.6 ci-dessous.

Soit $(X|\Delta)$ une orbifold *lisse* et *entière*, avec : $\Delta := \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$.

Definition 5.1

1. Une **courbe rationnelle orbifold**²³ est une orbifold géométrique $(C|\Delta')$ telle que $\deg(K_{(C|\Delta')}) < 0$. Cette courbe rationnelle orbifold est dite *entière* (resp. *finie*) si ses multiplicités le sont. On a donc : $C \cong \mathbb{P}^1$.

²³il s’agit ici de la version “divisible”.

Exemple 5.2

1. Si $C = \mathbb{P}_1$, et si $\Delta' = \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot p_j$, avec $m_j > 1, \forall j \in J$, les p_j étant des points distincts de X , alors $(\mathbb{P}_1|\Delta)$ est rationnelle orbifold si et seulement si $\sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) < 2$.

2. Lorsque Δ' est entière, c'est le cas si et seulement si la suite ordonnée croissante des $m_j, j \in J$ est l'une des suivantes :

$|J| \leq 2$: quelconque, $(+\infty, +\infty)$ exclue.

$|J| = 3$: $(2, 2, m), \forall m < +\infty; (2, 3, 3), (2, 3, 4); (2, 3, 5)$.

3. Lorsque Δ' est entière et finie, on a donc :

$(\mathbb{P}^1|\Delta')$ est rationnelle $\iff \exists f : \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{P}^1|\Delta')$, morphisme orbifold divisible surjectif.

4. Si Δ' est entière, non nécessairement finie, on a l'équivalence :

$(\mathbb{P}^1|\Delta')$ est rationnelle \iff ou bien : $\exists f : \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{P}^1|\Delta')$, morphisme orbifold divisible surjectif, ou bien Δ' a un support ayant au plus 2 points, dont un seul au plus a une multiplicité infinie.

Definition 5.3 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse et entière. Une Δ^{div} -courbe rationnelle (ou encore : une courbe Δ^{div} -rationnelle) $R \subset (X|\Delta)$ est l'image d'un morphisme orbifold divisible, non-constant et birationnel sur son image $\nu : (\mathbb{P}^1|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$, dans lequel $(\mathbb{P}^1|\Delta')$ est une courbe orbifold rationnelle lisse²⁴.

De l'exemple 5.2, on déduit :

Proposition 5.4 Soit $(X|\Delta)$, $\Delta := (\sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j)$ une orbifold géométrique lisse et entière, et $R \subset X$ une courbe irréductible non contenue dans le support de Δ , de normalisation $\nu : \hat{R} \rightarrow X$. On a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. $R \subset (X|\Delta)^{\text{div}}$ est une Δ^{div} -courbe rationnelle.

2. $\deg(K_{\hat{R}} + \Delta') = -2 + \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (1 - \frac{1}{\mu_p}) < 0$, $\Delta' := \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (1 - \frac{1}{\mu_p}) \cdot \{p\}$

étant le plus petit diviseur orbifold sur \hat{R} qui fait de $\nu : (\hat{R}|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold divisible.

On a donc alors : $\hat{R} \cong \mathbb{P}^1$, les μ_p étant définis comme suit.

²⁴On peut définir de même une courbe Δ -elliptique comme l'image d'un morphisme orbifold $\nu : (C|\Delta_C) \rightarrow (X|\Delta)$, birationnel sur son image, tel que $\deg(K_C + \Delta_C) = 0$, si C est une courbe lisse projective, et Δ_C minimal rendant ν un morphisme orbifold.

Pour tous $j, p \in \hat{R}$, on définit $t_{j,p}$ par : $\nu^*(D_j) = \sum_{p \in \hat{R}} t_{j,p} \cdot \{p\}$, et $\mu_p := \text{ppcm}_{\{j | t_{j,p} > 0\}} \{m'_{j,p} := \frac{m_j}{\text{pgcd}(t_{j,p}, m_j)}\}$, j décrivant l'ensemble des indices tels que $t_{j,p} > 0$.

Si Δ est, de plus, finie, ces conditions sont aussi équivalentes à :

3. Il existe un morphisme orbifold divisible $g : \mathbb{P}^1 \rightarrow (X|\Delta)$ dont l'image est R (g est, en général fini, mais non birationnel sur son image).

Remarque 5.5 La notion de courbe rationnelle orbifold définie ci-dessus coïncide donc avec la notion de restriction minimale de Δ (au sens divisible) telle que définie en 2.37 et 2.36 dans la catégorie $\text{Georb}^{\text{div}}$. En particulier, le théorème 2.41 est applicable aux familles couvrantes de Δ -courbes rationnelles (divisibles).

Remarque 5.6 On définit les variantes Δ^Z et Δ^Q de Δ -courbe rationnelle en remplaçant dans les définitions précédentes les morphismes orbifolds par des morphismes orbifolds quelconques, et en supposant, de plus, entières les orbifolds considérées pour la variante Δ^Z .

Si les multiplicités sont entières ou $+\infty$, les morphismes orbifolds $\nu : (\mathbb{P}^1|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ considérés peuvent être de deux types :

1. Soit divisibles (ou encore : classiques). On notera alors $(X|\Delta) = (X|\Delta)^{\text{div}}$ pour préciser la catégorie de morphismes considérés.

2. Soit non-classiques. On notera alors $(X|\Delta) = (X|\Delta)^Z$ pour préciser la catégorie de morphismes considérés.

□ Si les multiplicités sont rationnelles, les morphismes sont non-classiques. On le précisera néanmoins en notant : $(X|\Delta) = (X|\Delta)^Q$.

□ On notera Georb^* , $*$ = Q, Z, div , l'une des trois catégories dont les objets sont les orbifolds géométriques lisses, les morphismes étant de l'un des trois types : Q, Z ou div .

Il y a donc trois types de courbes orbifolds, selon la catégorie (d'orbifolds et de morphismes) considérée :

1. Les Δ^{div} -courbes rationnelles **divisibles** si $(X|\Delta)^{\text{div}}$ est entière et si ν est un morphisme orbifold divisible. Leur ensemble est noté $\text{Ratl}(X|\Delta)^{\text{div}}$.

2. Les Δ^Z -courbes rationnelles **entières** si $(X|\Delta)^{\text{div}}$ est entière et si ν est un morphisme orbifold non-classique. Leur ensemble est noté $\text{Ratl}(X|\Delta)^Z$. On a donc : $\text{Ratl}(X|\Delta)^{\text{div}} \subset \text{Ratl}(X|\Delta)^Z$:

3. Les Δ^Q -courbes rationnelles, en général, si ν est un morphisme orbifold non-classique. Leur ensemble est noté $\text{Ratl}(X|\Delta)^Q$.

Pour les orbifoldes entières, on a donc :

$\text{Ratl}(X|\Delta)^{\text{div}} \subset \text{Ratl}(X|\Delta)^Z \subset \text{Ratl}(X|\Delta)^Q$. Ces inclusions sont strictes en général. Lorsque $(X|\Delta)$ est logarithmique (i.e : si $\Delta = [\Delta]$), ces trois notions coïncident cependant.

Remarque 5.7 La proposition 5.4 est encore valable pour les Δ^* -courbes rationnelles, avec $*$ = Z ou Q , à condition d'y supprimer le mot "divisible", et l'hypothèse d'intégralité lorsque $*$ = Q .

1. Si l'on veut que R soit une Δ^Z -courbe rationnelle, et si $(X|\Delta)$ est entière, on doit donc choisir : $\mu_p := \max_{\{j|t_{j,p}>0\}} \{\lceil \frac{m_j}{t_{j,p}} \rceil\}$.

2. Si l'on veut que R soit une Δ^Q -courbe rationnelle, on doit choisir : $\mu_p := \max_{\{j|t_{j,p}>0\}} \{\frac{m_j}{t_{j,p}}\}$.

Exemple 5.8

1. Si R , rationnelle, a tous ses ordres de contact avec chacun des D_j d'ordre au moins m_j , alors R est Δ^Q -rationnelle, avec : $\Delta' = 0$. Lorsque Δ est entière, si R , rationnelle, a tous ses ordres de contact avec chacun des D_j divisibles par m_j , alors R est Δ^{div} -rationnelle, avec : $\Delta' = 0$.

2. Si $(X|\Delta)$ est une orbifold géométrique lisse logarithmique ($\Delta = \text{supp}(\Delta)$), les Δ -courbes rationnelles sont les courbes rationnelles R de X dont la normalisation rencontre Δ en, au plus, 1 point.

Par exemple, si $X = \mathbb{P}^2$, et si $\Delta = D$, une droite projective affectée de la multiplicité infinie, alors : les droites $L \neq D$ sont Δ -rationnelles, les coniques irréductibles Δ -rationnelles sont celles qui sont tangentes à D , et une cubique irréductible singulière est Δ -rationnelle si et seulement si elle est cuspidale, et tangente à D en son unique point singulier.

3. Soit X une variété projective lisse et torique. Et D son diviseur anticanonique torique (à croisements normaux). On affecte chacune des composantes de D d'une multiplicité finie, et on note Δ le diviseur orbifold résultant. Si R est une courbe rationnelle torique (adhérence de l'orbite d'un sous-groupe algébrique à un paramètre du tore agissant sur X), non contenue dans D , alors R rencontre D en au plus 2 points en lesquels elle est unibranche. C'est donc une Δ^{div} -courbe rationnelle.

4. Si $X = \mathbb{P}^2$, et Δ la réunion de 3 droites en position générale, affectées de multiplicités entières arbitraires a, b, c , alors $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ est Fano. En effet, son fibré canonique est de degré $\delta := -3 + [(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})] =$

$-\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] < 0$. On dispose de trois familles de droites Δ^{div} -rationnelles couvrant X , celles passant par l'un des trois points d'intersection de deux des trois droites du support de Δ . Nous verrons en 5.31 et 5.37 que pour tout sous-ensemble fini E de \mathbb{P}^2 , il existe une courbe Δ^{div} -rationnelle irréductible contenant E . Cet exemple se généralise immédiatement à \mathbb{P}^n , avec $n+1$ droites munies de multiplicités finies.

5. Si $X = \mathbb{P}^2$, et Δ la réunion de 4 droites en position générale, affectées de multiplicités $2, 2, a, b$, pour des entiers $4 \leq a \leq b$. Alors $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ est Fano. En effet, son fibré canonique est de degré $\delta := -3 + [(1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b})] = -[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}] < 0$. Dans ce cas, une seule des trois familles de droites précédentes est formée de courbes Δ^{div} -rationnelles : celles passant par l'intersection des deux droites de multiplicités a et b . Si l'on remplace les deux droites de multiplicité 2 par une conique générale affectée de la multiplicité 2, on a une seconde famille de droites Δ^{div} -rationnelles : la famille des tangentes à C .

6. Considérons maintenant $X = \mathbb{P}^2$, et Δ la réunion de 4 droites en position générale, affectées de multiplicités a, b, c, d . Alors son fibré canonique est de degré $\delta := -3 + [(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c}) + (1 - \frac{1}{d})] = 1 - [\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}] < 0$. Donc $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ est Fano si et seulement si : $[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}] > 1$. Il n'existe qu'un nombre fini de tels quadruplets. Des exemples sont : $(3, 3, 5, 7)$ et $(2, 3, 7, 41)$ pour lesquels $\delta = -\frac{1}{3.5.7} = -\frac{1}{105}$ et $\delta = -\frac{1}{2.3.7.41} = -\frac{1}{1722}$ respectivement.

Ce dernier exemple se généralise au cas de \mathbb{P}^n muni de $n+2$ droites munies de multiplicités $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} - 2)$, avec : $a_0 = 2, a_1 = 7, \dots, a_{k+1} = a_0.a_1 \dots a_k + 1$ si $k = 1, 2, \dots, n+1$. On a alors : $\delta_n = -\frac{1}{a_0.a_1 \dots a_n.(a_{n+1}-2)}$, probablement maximum parmi les $(X|\Delta)$ Fano lisses et entières de dimension n . (On voit facilement que $a_n > (\frac{3}{2})^{2^n}$, et donc que $-\frac{1}{\delta_n} > -(\frac{2}{3})^{2^{n+1}}$).

Si $X = \mathbb{P}^2$, et si $(a, b, c, d) = (3, 3, 5, 7)$ (resp. $(2, 3, 7, 41)$), il n'existe qu'un nombre fini de droites Δ^Z -rationnelles, celles passant par 2 des 6 points d'intersection des 4 droites du support de Δ , puisqu'une droite rencontrant $\text{Supp}(\Delta)$ en au moins 3 points, y acquiert des multiplicités au moins $3, 3, 7$ (resp. $(2, 3, 41)$). Par contre, $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ a dans ces deux exemples, une famille à un paramètre de coniques irréductibles Δ^Q -rationnelles : les coniques tangentes à chacune des 4 droites de $\text{Supp}(\Delta)$. Elles acquièrent en effet en leurs points de contact des multiplicités rationnelles $a/2, b/2, c/2, d/2$. Puisque $-2 + -(1-2/a) + (1-2/b) + (1-2/c) + (1-2/d) = 2 - 2(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) < 0$, ces coniques sont bien Δ^Q -rationnelles.

Par contre, ces coniques ne sont pas Δ^Z -rationnelles, car

$(\lceil a/2 \rceil, \lceil b/2 \rceil, \lceil c/2 \rceil, \lceil d/2 \rceil) = (2, 2, 3, 4)$ (resp. $(1, 2, 4, 21)$). Il ne semble pas immédiat de fournir pour ces deux exemples une famille couvrante de courbes Δ^{div} -rationnelles. Un décompte de dimensions indique qu'il semble possible d'avoir des familles à nombre positif de paramètres de Δ^{div} -courbes rationnelles, et même avec $\Delta' = 0$, mais seulement pour de grands degrés, divisibles par 105 et $1722 = 41.42$ respectivement.

En effet : les courbes rationnelles planes irréductibles de degré $d = N.105$ dépendent de $p_N := 3(d+1) - 1 - 3 = 3d - 1$ paramètres. La condition d'avoir avec une droite des points de contacts d'ordres tous divisibles par d' , diviseur de d , fournit $\frac{d}{d'} \cdot (d' - 1) = d \cdot (1 - \frac{1}{d'})$ conditions.

Dans notre cas, ceci fournit donc (avec $d' = 3, 3, 5, 7$ successivement), un nombre de conditions total $c_N := d \cdot [(1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{5}) + (1 - \frac{1}{7})] = N.3.5.7 \cdot (3 + \frac{1}{105}) = N.105.3 + 3.N = 3d + 3.N$. On peut donc escompter avoir une famille à : $p_N - c_N = 3N - 1$ paramètres de Δ^{div} -courbes rationnelles (sans structure orbifold). Le calcul est entièrement analogue dans le cas de multiplicités $(2, 3, 7, 41)$ (ou quelconques telles que $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ soit lisse Fano).

Ce calcul montre que le nombre "attendu" de paramètres dont dépend la courbe Δ -rationnelle C de degré d tel que $\delta.d$ est entier est : $(3 - [(1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{5}) + (1 - \frac{1}{7})]) \cdot d - 1 = \delta.d - 1 = -(K + \Delta).C - 1$.

Remarquons que si les droites considérées sont respectivement d'équations homogènes $X = 0, Y = 0, Z = 0, uX + vY + wZ = 0$ respectivement, et si une telle courbe rationnelle $R(t)$ de degré 105 existe bien, elle est donnée par un paramétrage $X(t) = A^3(t), Y(t) = B^3(t), Z(t) = C^5(t)$, les polynômes A, B, C étant de degrés au plus 35, 35, 21 respectivement, et satisfaisant l'égalité : $u.A^3 + v.B^3 + w.C^5 = D^7$, D étant un polynôme de degré au plus 15. Si u, v, w sont algébriques, et les coefficients de A, B, C, D peuvent être alors choisis dans un corps de nombres k , et le paramétrage précédent fournit une infinité de solutions dans k de l'équation : $u.A^3 + v.B^3 + w.C^5 = D^7$. Le problème de densité potentielle de $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ est de savoir si l'on peut trouver une infinité de telles courbes R définies sur un même corps k . Ces remarques s'appliquent aux multiplicités $(2, 3, 7, 41)$ et à l'équation : $u.A^2 + v.B^3 + w.C^7 = D^{41}$.

Remarque 5.9 Des arguments conceptuels de théorie des déformations permettent de généraliser ce calcul aux déformations de courbes Δ -rationnelles sur des orbifolds géométriques lisses finies arbitraires.

Soit en effet : $f : (\mathbb{P}^1|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold divisible définissant une courbe Δ -rationnelle. Par composition avec un morphisme

fini $g : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ramifiant de façon adéquate, on obtient un morphisme orbifold $h := f \circ g : \mathbb{P}^1 \rightarrow (X|\Delta)$.

On peut vérifier que l'espace tangent en h à la déformation de h en tant que morphisme orbifold (resp. l'espace des obstructions à cette déformation) est simplement $H^0(\mathbb{P}^1, h^*(TX(-\log(\Delta)))$ (resp. $H^1(\mathbb{P}^1, h^*(TX(-\log(\Delta)))$). Ici $TX(-\log(\Delta))$ est le \mathbb{Q} -faisceau des champs de vecteurs holomorphes $(1 - \frac{1}{m_j})$ -tangents à D_j , pour chacun des D_j . Lorsque $h : \mathbb{P}^1 \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold divisible, $h^*(TX(-\log(\Delta)))$ est un faisceau entier sur \mathbb{P}^1 . Et l'espace des déformations à h (en tant que morphisme orbifold) est de dimension au moins $\chi(\mathbb{P}^1, h^*(TX(-\log(\Delta))) = -(K_X + \Delta).h_*(\mathbb{P}^1) + n$.

Cette observation devrait permettre de traiter les questions d'évitement des lieux de codimension deux, et le "glueing lemma" dans le cadre orbifold, évoqués ci-dessous. Voir aussi l'exemple 5.29 ci-dessous.

5.2 Uniréglage, Connexité Rationnelle orbifold

Definition 5.10 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse et entière, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. On dit que $(X|\Delta)$ est :

1. **uniréglée** (abrégé en : UR) si le point générique de X est contenu dans une Δ^{div} -courbe rationnelle.
2. **rationnellement connexe par chaines** (en abrégé : RCC) si tout couple de points génériques de X est contenu dans une chaîne (ie : une réunion finie connexe) de Δ^{div} -courbes rationnelles.
- 2'. **faiblement rationnellement connexe par chaines** (en abrégé : fRCC) si tout couple de points de X est contenu dans une chaîne de Δ^{div} -courbes rationnelles ou de leurs dégénérescences dans $\text{Chow}(X)$.
3. **rationnellement connexe** (en abrégé : RC) si tout couple de points génériques de X est contenu dans une Δ^{div} -courbe rationnelle.
5. **absolument rationnellement connexe** (en abrégé : ARC) si tout ensemble fini de points génériques de X est contenu dans une Δ^{div} -courbe rationnelle.

On dira aussi que X est Δ -UR (resp. Δ -RCC, RC, ARC), au lieu de : $(X|\Delta)$ est UR (resp. RCC, RC, ARC).

Remarque 5.11 Les deux autres notions de Δ^* -courbes rationnelles, avec $*$ = Z ou Q (divisible, entière ou non) peuvent être aussi employées ci-dessus,

et conduisent d'ailleurs peut-être à des notions équivalentes dans nombre de cas importants (mais pas toujours : si $X = \mathbb{P}_1$, par exemple, les notions UR^Q et UR^Z diffèrent si Δ est à multiplicités rationnelles et si son support a au moins 4 points).

On notera en effet, UR^* , RCC^* , etc..., avec $*$ = div, Z, Q les propriétés correspondantes, lorsque le contexte nécessite de préciser la notion considérée.

On pourra aussi dire, par exemple, de manière équivalente, que $(X|\Delta)^{div}$ est RC , ou que $(X|\Delta)$ est RC^{div} , ou encore : que X est $\Delta^{div}-RC$.

Exemple 5.12

1. Soit $(X|\Delta)$ l'exemple torique de 5.8.(3) ci-dessus. Alors $(X|\Delta)$ est rationnellement connexe, puisque toutes ses courbes toriques rationnelles non-contenues dans D sont Δ -rationnelles.

2. L'orbifolde $(\mathbb{P}_2|\Delta)$ de l'exemple 5.8.(6) ci-dessus est RC^Q (mais avec des coniques Δ -rationnelles non-entières). L'argument de comptage de cet exemple 5.8.(6) semble indiquer qu'elle devrait être ARC^{div} .

Remarque 5.13

On a les implications évidentes :

$$ARC \implies RC \implies RCC \implies fRCC \implies UR.$$

Lorsque $\Delta = 0$, et si X est projective, on a les implications réciproques : $RCC \implies RC \implies ARC$ ([KoMiMo92]).

Question 5.14

1. Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$. Les propriétés $fRCC^{div}$ et ARC^{div} sont-elles équivalentes pour $(X|\Delta)$? La condition de finitude ne peut être supprimée, en vertu de l'exemple 5.16 ci-dessous.

2. Les propriétés précédentes (définies en 5.10) sont-elles stables par déformation (au sens de 12.1) ?

3. Nous donnerons ci-dessous au §5.6 une réponse affirmative à la question 1 précédente dans le cas où $(X|\Delta)$ est un "quotient global", et indiquons une approche possible, suggérée par cet exemple, à la solution de cette question en utilisant la théorie des champs algébriques de DM lisses.

Question 5.15 Supposons $(X|\Delta)$ lisse et entière, avec $X \in \mathcal{C}$. Les différentes notions UR, RC, ARC sont-elles équivalentes dans $Georb^Q$ et dans $Georb^{div}$?

Explicitement : si $(X|\Delta)$ est UR^Q , est-elle UR^{div} ? La réciproque est évidente. Même question pour RC et ARC .

Exemple 5.16

1. La propriété RCC n'est pas préservée par équivalence biméromorphe (avec les définitions ci-dessus) pour les orbifoldes géométriques logarithmiques lisses. Par exemple : $(\mathbb{P}^2|D)$ est (Fano et) RCC , si D est la réunion de 2 droites distinctes concourantes en 1 point a . En effet, les droites passant par a sont D -rationnelles et sont, en fait les seules D -courbes rationnelles. En effet, par éclatement de a , on obtient une orbifolde géométrique qui n'est pas RCC : elle admet une fibration orbifolde évidente sur l'orbifolde géométrique $(\mathbb{P}^1|D')$, où D' est la réunion (réduite) de 2 points. Donc $\kappa(\mathbb{P}^1|D') = 0$, et toutes les courbes Δ -rationnelles de cet éclaté sont les fibres de cette fibration. Les droites passant par a sont donc bien aussi les seules courbes D -rationnelles de \mathbb{P}^2 .

En particulier, l'orbifolde logarithmique $(\mathbb{P}_2|D)$ est Fano, sans être RE .

2. Le phénomène précédent provient de ce que les singularités du couple (\mathbb{P}^2, D) sont log-canoniques (lc), mais pas klt . En effet, en considérant l'orbifolde $(\mathbb{P}^2|C)$, où C est maintenant une conique lisse de multiplicité infinie, on voit que cette orbifolde admet pour tout degré d des familles à d paramètres de courbes C -rationnelles R_P de degré d , données explicitement en coordonnées affines (x, y) par le paramétrage : $x(t) := \frac{t \cdot (P(t) + t^{d-1})}{(P(t) + 2t^{d-1})}$, $y(t) := \frac{t^2 \cdot P(t)}{(P(t) + 2t^{d-1})}$, si $P(t)$ est un polynôme de degré au plus $(d-2)$ tel que : $P(0) \neq 0$. On suppose ici que C a pour équation affine : $y = x^2$. La courbe rationnelle ainsi paramétrée admet un contact d'ordre $2d$ (donc unique et unibranche) au point $(0, 0)$, choisi arbitrairement sur C . Cette courbe est donc bien de degré exact d . On doit pouvoir vérifier que si l'on se donne $d-1$ points génériques de \mathbb{P}^2 , un choix adéquat des coefficients de P permet de faire passer la courbe R_P par ces $d-1$ points. Lorsque $d = 2$, il est évident que c'est bien le cas, et $(\mathbb{P}^2|C)$ est RC .

La propriété suivante est analogue à celle du cas $\Delta = 0$. On peut la démontrer, à l'aide du théorème 2.41, en adaptant l'argument de [Ca 91]. Un résultat plus général sera établi dans 11.25), nous donnons donc une simple indication de preuve.

Proposition 5.17 *Soit $(X|\Delta)^{div}$ lisse, entière, finie et RC^{div} , avec X projective²⁵. Alors $\pi_1(X|\Delta)$ est fini.*

²⁵ $X \in \mathcal{C}$ suffit.

Démonstration : On peut adapter l'argument de [Ca 91]. Par le théorème 2.41, nous pouvons supposer (quitte à modifier $(X|\Delta)$) qu'il existe une famille $(C_t)_{t \in T}$ de courbes Δ^{div} -rationnelles couvrant X , et dont le membre générique C_t passe par un point fixé $a \notin \text{Supp}(\Delta)$, et rencontre $\text{Supp}(\Delta)$ transversalement et seulement en des points lisses de $\text{Supp}(\Delta)$. On raisonne sur $Z \subset T \times X$ le graphe d'incidence, muni des projections $p : Z \rightarrow X, q : Z \rightarrow T$. On munit Z de la plus petite structure orbifold faisant de p un morphisme orbifold. Les fibres orbifoldes génériques de q sont Δ -rationnelles par 2.41, donc de π_1 fini. On conclut comme dans [Ca 91], à l'aide de la suite exacte (voir 11.9) des groupes fondamentaux orbifold associée à q , en utilisant la section de q déterminée par le point a \square

5.3 Invariance biméromorphe

Nous allons montrer sur un exemple que, contrairement au cas $\Delta = 0$, la notion de Δ -courbe rationnelle n'est pas un invariant biméromorphe en général.

Exemple 5.18 *Nous allons montrer que l'inclusion $g_*(\text{Ratl}(X_1|\Delta_1)^{div}) \subset \text{Ratl}(X|\Delta)^{div}$ peut être stricte, même si $(X_1|\Delta_1)^{div}$ est minimum rendant $g : (X_1|\Delta_1)^{div} \rightarrow (X|\Delta)^{div}$ un morphisme orbifold. Ceci montre (voir aussi la remarque 2.39) que la condition de transversalité du théorème 2.38 n'est pas superflue pour préserver la restriction des courbes.*

Prenons $(X|\Delta) := (\mathbb{P}_2|\Delta)$, avec $\Delta := (1 - 1/2).(D_1 + D_3) + (1 - 1/3).D_2$, D_1 (resp. D_2) étant la droite d'équation affine : $x = 0$ (resp. $y = 0$), tandis que D_3 est une droite générique rencontrant la cubique rationnelle R d'équation affine : $y^2 = x^3$ en 3 points distincts a, b, c , dont le point à l'infini $a = (0, 1, 0)$ en coordonnées projectives. Alors R est une courbe Δ^{div} -rationnelle de $\mathbb{P}_2 := X$, puisqu'elle a un contact d'ordre 3 (resp. 2) avec D_2 (resp. D_1), de sorte que le diviseur orbifold minimum Δ_R sur R rendant l'inclusion normalisée $(R|\Delta_R) \rightarrow (\mathbb{P}_2|\Delta)$ un morphisme orbifold divisible est $\Delta_R := (1 - 1/2).(\{a\} + \{b\} + \{c\})$.

Soit alors $g : X_1 \rightarrow \mathbb{P}_2 = X$ l'éclatement du point de coordonnées affines $(0, 0)$, et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Soit R_1 la transformée stricte de R dans X_1 . Elle a donc un ordre de contact avec E (resp. la transformée stricte D'_1 de D_1 ; resp. D'_2 de D_2) égal à 2 (resp. 0 (sur E) ; resp. 1).

La structure orbifold minimum Δ_1^{div} sur X_1 faisant de $g : (X_1|\Delta_1) \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold divisible est :

$$\Delta_1^{div} := (1 - 1/6).E + (1 - 1/2).(D'_1 + D'_3) + (1 - 1/3).D'_2.$$

Tandis que la structure orbifold minimum $\Delta_{R_1}^{div}$ sur R_1 faisant de l'inclusion $(R_1|\Delta_{R_1}) \rightarrow (X_1|\Delta_1)$ un morphisme orbifold divisible est :

$\Delta_{R_1}^{div} := (1 - 1/2).(\{d\} + \{a\} + \{b\} + \{c\})$, en identifiant a, b, c avec leurs images réciproques dans X_1 , tandis que $d := (E \cap D'_2)$. Il en résulte que R_1 n'est pas une Δ_1^{div} -courbe rationnelle (mais elle reste cependant "elliptique").

On peut d'ailleurs vérifier que R_1 n'est pas non plus une courbe $(X_1|\Delta')^Q$ -rationnelle si $g : (X_1|\Delta')^Q \rightarrow (X|\Delta)^Q$ est un morphisme orbifold.

Question 5.19 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$. Les propriétés *UR*, *RCC*, *RC*, *ARC* sont-elles alors préservées par équivalence biméromorphe (dans Georb^* , avec $*$ = *div*, *Z*, ou *Q*) ?

Nous indiquerons en 5.38 une solution partielle à ce problème lorsque $(X|\Delta)$ est un quotient global, et en déduirons une approche possible grâce aux champs algébriques.

Il est clair que si $g : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold (dans Georb^*), avec $g(X') = X$, et si X' possède l'une des propriétés *UR*, *RCC*, *RC*, *ARC*, alors $(X|\Delta)$ la possède aussi. Le problème est donc le relèvement des Δ^* -courbes rationnelles de X à $(X'|\Delta')^*$ lorsque g est biméromorphe, avec $g_*(\Delta') = \Delta$.

Nous pouvons, grâce au théorème 2.41, donner une réponse partielle affirmative à cette question :

Théorème 5.20 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. Si $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est une modification orbifold élémentaire minimale, avec $(X'|\Delta')$ lisse, et si $(X|\Delta)$ possède l'une des propriétés *UR*, *RC*, *ARC*, alors $(X'|\Delta')$ la possède aussi, si u est transverse à une famille adéquate de courbes rationnelles de $(X|\Delta)$ ²⁶.

Démonstration : Montrons l'assertion pour la propriété *RC* dans le cadre des morphismes divisibles. Soit $(C_t)_{t \in T}$ une famille couvrante de

²⁶La conclusion ne subsiste pas pour la propriété *RCC*, par 5.16.

courbes Δ -rationnelles de X . Par le théorème 2.41, nous pouvons supposer le transformé strict dans X' du membre générique de cette famille est une Δ' -courbe rationnelle rencontrant $Supp(\Delta')$ transversalement et en des points lisses de ce diviseur, puisque l'on a supposé que la structure orbifold Δ' est minimale rendant u un morphisme orbifold, et que u est transverse à la famille “adéquate” T .

La démonstration pour les propriétés RC et ARC est analogue \square

Le résultat évident suivant 5.21 montre que l'évitement des lieux de codimension 2 ou plus permet de résoudre affirmativement la question précédente, lorsque la structure orbifold Δ' n'est plus minimale.

Soit $(R_t)_{t \in T}$ une famille analytique de courbes de X , paramétrée par l'espace analytique irréductible compact $T \subset Chow(X)$. On dira que cette famille est **couvrante** (resp. **bicouvrante**) si son membre générique R_t est irréductible, et si son graphe d'incidence $Z \rightarrow T \times X$ est surjectif sur X (resp. si $Z \times_T Z \rightarrow X \times X$ est surjectif).

Supposons que le membre générique de cette famille de courbe possède une propriété Π . Une telle famille est dite **maximale pour Π** si toute famille analytique $(R_s)_{s \in S}$, avec $T \subset S \subset Chow(X)$ dont le membre générique possède Π est telle que $S = T$.

Proposition 5.21 *Soit $(X|\Delta)$ lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$. Soit $(R_t)_{t \in T}$ une famille analytique couvrante (resp. bicouvrante) de courbes Δ^{div} -rationnelles de X , et maximale pour la propriété d'être Δ^{div} -rationnelles.*

1. *Si, pour tout sous-ensemble analytique fermé $A \subset X$, de codimension au moins 2, le membre générique R_t de cette famille ne rencontre pas A . Alors, pour tout morphisme orbifold divisible biméromorphe $g : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$, avec $(X'|\Delta')$ lisse, entière et finie telle que $g_*(\Delta') = \Delta$, $(X'|\Delta')$ est aussi Δ^{div} -UR (resp. Δ^{div} -RC).*

2. *Si la propriété précédente d'évitement des lieux de codimension au moins 2 est satisfaite pour toute telle $(X|\Delta)$, les propriétés UR^{div} et RC^{div} sont alors préservées par équivalence biméromorphe dans cette classe d'orbifolds géométriques.*

Démonstration : La transformée stricte du membre générique R_t ne rencontre pas le diviseur exceptionnel de g , et est donc une Δ' -courbe rationnelle de X' . La seconde assertion en résulte immédiatement \square

Remarque 5.22 1. Lorsque $\Delta = 0$, la propriété d'évitement de A précédente est satisfaite par toute famille couvrante de courbes rationnelles (puisque le fibré normal du membre générique est semi-positif).

2. La proposition précédente et sa démonstration, restent valables pour les courbes Δ^* -rationnelles, avec $*$ = Z, Q .

3. Nous montrerons dans 5.38 la propriété d'évitement de 5.21 pour les “quotients globaux”, et en déduirons qu'elle est valable pour les $(X|\Delta)$ lisses entières et finies dans \mathcal{C} si elle l'est pour les champs de DM lisses.

4. Cette propriété d'évitement n'est cependant pas satisfaite par les $(X|\Delta)$ lisses, entières et finies générales : si $(X|\Delta) = (\mathbb{P}^2|\Delta)$, où Δ est supportée par 3 droites en position générale et affectées de multiplicités (a, b, c) dont la somme des inverses est au plus 1 (telles que, par exemple $(2, 3, m)$ avec $m \geq 6$), alors les droites passant par l'un des trois points d'intersection des 3 droites forment trois familles couvrantes maximales de courbes Δ -rationnelles n'évitant pas l'un des trois points.

5. Remplaçant la famille donnée par un “multiple”, obtenu en déformant la composée $h := g \circ f : \mathbb{P}^1 \rightarrow (X|\Delta)$, où $g : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est finie, de grand degré et telle que h soit un morphisme orbifold, la propriété d'évitement doit être satisfaite par h , même si elle ne l'est pas pour l'application “initiale” f . Ceci doit pouvoir être établi par l'observation de la remarque 5.9.

5. L'invariance biméromorphe des propriétés UR^*, RC^*, \dots peut cependant être déduite de la propriété d'évitement (C) plus faible énoncée dans le théorème 5.78.

5.4 Uniréglage et Dimension Canonique : Conjectures

Definition 5.23 Si $(X|\Delta)$ est une orbifold géométrique lisse, on pose :

$\kappa_+(X|\Delta) := \max_f \{\kappa(f|\Delta)\}$, $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ parcourant l'ensemble des applications méromorphes surjectives (ie : dominantes), avec $\dim(Y) > 0$.

C'est un invariant biméromorphe, avec : $\kappa_+ \geq \kappa$.

Donc $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$ signifie : $\kappa(f|\Delta) = -\infty, \forall f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$.

Exemple 5.24 Si X est rationnellement connexe, alors $\kappa_+(X) := \kappa_+(X|0) = -\infty$.

Définissant : $\kappa_{++}(X|\Delta) := \max_{L \in \Omega_X^p, p > 0, rg(L)=1} \{\kappa(L|\Delta)\}$, on a même : $\kappa_{++}(X) := \kappa_{++}(X|0) = -\infty$ si X est RC.

La démonstration de l'énoncé suivant est facile, grâce au théorème 2.41 :

Proposition 5.25 *Soit $(X|\Delta)^Q$ une orbifolde géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe.*

1. Si $(X|\Delta)^Q$ est UR, alors $\kappa(X|\Delta) = -\infty$.
2. Si $(X|\Delta)^Q$ est RC, alors $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$.

Démonstration : Soit Z un modèle lisse du graphe d'incidence d'une famille algébrique couvrante (resp. couvrante passant par un point $a \in X - Supp(\Delta)$) de X , notée $(C_t)_{t \in T}$ de courbes Δ^Q -rationnelles, pour démontrer l'assertion 1 (resp. 2). Les projections naturelles sont notées $p : Z \rightarrow X$ et $q : Z \rightarrow T$. Pour l'assertion 1, on suppose de plus que $\dim Z = \dim X$.

Le théorème 2.41 nous permet, quitte à remplacer $(X|\Delta)$ par une modification orbifolde élémentaire minimale transverse à la famille T , de supposer que le membre générique C_t de cette famille est lisse, et rencontre transversalement $Supp(\Delta)$, et seulement en des points lisses de ce diviseur.

On munit Z de la plus petite structure orbifolde (que l'on peut supposer lisse) pour laquelle $p : (Z|\Delta_Z) \rightarrow (X|\Delta)^Q$ est un morphisme orbifolde. La fibre orbifolde générique $(C'_t|\Delta_t)$ de q est alors rationnelle.

Pour l'assertion 1, supposons par l'absurde l'existence d'une section non nulle : $w \in H^0(X, m.(K_X + \Delta))$, $m > 0$.

Alors $0 \neq p^*(w) \in H^0(Z, m.(K_Z + \Delta_Z))$. Contredit le fait que la restriction à C'_t de $p^*(w)$, qui est non-nulle, doit s'annuler, puisque : $(C'_t|\Delta_t)$ est rationnelle, et que le fibré normal de C'_t dans X est trivial.

Pour l'assertion 2, on note $s : T \rightarrow X$ la section telle que : $s(t) := (t, a)$, $\forall t \in T$.

Soit $0 \neq w \in H^0(X, S^m \Omega^r(X|\Delta))$, avec $r > 0, m > 0$. Soit $0 \neq p^*(w) \in S^N(\Omega(X|\Delta))$.

Alors $p^*(w) = q^*(w')$, puisque : $(C'_t|\Delta_t)$ est rationnelle de fibré normal trivial, et $w' = 0$, puisque $w' = s^*(q^*(w')) = s^*(p^*(w)) = 0$, puisque $p \circ s : T \rightarrow X$ est l'application constante. Donc $w = 0$ \square

La conjecture suivante est la version orbifolde d'une conjecture standard (qui en est le cas où $\Delta = 0$) de la géométrie algébrique :

Conjecture 5.26 Soit $(X|\Delta)^Q$ une orbifold géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe.

Si $\kappa(X|\Delta) = -\infty$, alors $(X|\Delta)^Q$ est UR^Q . Si, de plus, $(X|\Delta)$ est à multiplicités entières, elle est Δ^{div} -uniréglée.

Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$, alors $(X|\Delta)^Q$ est RC^Q . Si, de plus, $(X|\Delta)$ est à multiplicités entières, elle est $\Delta^{\text{div}} - RC$.

Remarque 5.27

1. La condition $\kappa = -\infty$ étant un invariant biméromorphe, la conjecture 5.26 implique l'invariance biméromorphe de l'uniréglage, et aussi l'équivalence des conditions UR^Q et UR^{div} lorsque Δ est à multiplicités entières. Ainsi que des conclusions analogues pour la connexité rationnelle et la condition $\kappa_+ = -\infty$.

2. Il est facile de montrer (à l'aide du "quotient rationnel" et de [GHS 03]) que si la première partie de la conjecture est vraie lorsque $\Delta = 0$, la seconde l'est aussi.

3. Le seul cas non-trivial avec $\Delta \neq 0$ dans lequel cette conjecture est connue est celui des surfaces projectives avec diviseur orbifold logarithmique ($\Delta = \text{Supp}(\Delta)$), par [K-M98]. Il s'agit donc dans ce cas de recouvrir X par des courbes rationnelles R rencontrant Δ en un seul point, en lequel R est unibranche.

Exemple 5.28 Soit $X = \mathbb{P}^2$, et $\Delta = C$, avec C une conique lisse. Donc $(\mathbb{P}^2|C)$ est Fano. Les courbes rationnelles orbifoldes R sont alors les courbes rationnelles (de degré d), qui coupent C en un unique point en lequel R est unibranche.

Lorsque $d = 1$, les tangentes à C sont donc de tels exemples. Lorsque $d = 2$, R est une conique lisse osculatrice à C . On a vu en 5.16 que l'on peut trouver de telles courbes C -rationnelles pour tous les degrés d . On devrait pouvoir en déduire que $(\mathbb{P}^2|C)$ est ARC.

Lorsque les multiplicités sont finies, de nombreux nouveaux cas se présentent, même lorsque $n = 2$, d'orbifoldes géométriques lisses $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ qui sont Fano, et pour lesquelles la vérification de la conjecture 5.26 n'est pas immédiate.

Exemple 5.29 Soit $X = \mathbb{P}^2$, $\Delta = 2/3(L_3 + M_3) + 4/5L_5 + 6/7.L_7$, où L_3, M_3, L_5, L_7 sont quatre droites en position générale. L'orbifold

géométrie lisse $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ est Fano, puisque $2/3+1/5+1/7 = 1+1/105 > 1$. La conjecture précédente implique qu'elle devrait être RC^{div} . Voir l'exemple 5.8 pour une possible vérification directe de cette propriété. Il serait intéressant d'avoir une approche plus conceptuelle (par déformation) de ce problème. Voir la remarque 5.9.

5.5 Quotients globaux : descente et relèvement de courbes rationnelles

Soit $(X|\Delta)$ lisse, finie et entière, avec $X \in \mathcal{C}$. Nous allons introduire une classe (très restreinte) de telles orbifolles géométriques pour lesquelles les problèmes concernant les courbes Δ^{div} -rationnelles peuvent être réduits au cas usuel où $\Delta = 0$. La considération des champs algébriques de DM associés devrait permettre d'étendre cette réduction à toutes les orbifolles géométriques $(X|\Delta)$ lisse, finie et entière, avec $X \in \mathcal{C}$.

Definition 5.30 Soit $(X|\Delta)$ lisse, finie et entière, avec $X \in \mathcal{C}$, et soit $f : X' \rightarrow X$ une application holomorphe propre et finie surjective, avec X' lisse. On dit que f **ramifie au moins** (resp. **ramifie exactement**) au-dessus de Δ^{div} si f est étale au-dessus du complémentaire du support de Δ , et si, pour chaque j , et chaque point x' de X' tel que $f(x') \in D_j$, f ramifie en x' à un ordre m'_j multiple de m_j (resp. tel que $m'_j = m_j$).

On dit que f ramifie au moins au-dessus de Δ^Z si $m'_j \geq m_j$, pour tous j, x' comme ci-dessus.

On dit que $(X|\Delta)$ est un **quotient global** s'il existe un $f : X' \rightarrow X$ comme ci-dessus, qui ramifie exactement au-dessus de Δ^{div} (ou Δ^Z), les notions coïncidant alors)

Exemple 5.31 Soit $X = \mathbb{P}^2$, $\Delta = \sum_{j=1}^3 (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$, où les $m_j > 1$ sont entiers, et les D_j les droites d'équation $T_j = 0$, dans les coordonnées homogènes (T_1, T_2, T_3) . On note $m := \text{pgcd}_j \{m_j\}$. Soit $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ le morphisme défini par $f(U_j) = T_j := U_j^m$, pour $j = 1, 2, 3$. Alors ce morphisme ramifie au moins (resp. exactement) au-dessus de Δ^{div} pour tous m_j (resp. si $m_j = m, \forall j$).

Théorème 5.32 Soit $(X|\Delta)$ lisse, finie et entière, avec $X \in \mathcal{C}$. On suppose qu'il existe un morphisme propre et fini $f : X' \rightarrow X$ ramifiant au moins au-dessus de Δ^{div} (resp. Δ^Z).

1. Soit $R' \subset X'$ une courbe rationnelle, et $R := f(R') \subset X$. Alors : R est une Δ^{div} -courbe rationnelle (resp. une Δ^Z)-courbe rationnelle.
2. Si f ramifie exactement au-dessus de Δ^{div} , et si $R \subset X$ est une Δ^{div} -courbe rationnelle, toute composante irréductible $R' \subset X'$ de $f^{-1}(R)$ est une courbe rationnelle de X' .

Nous donnerons dans les trois sections suivantes des conséquences immédiates de ce résultat.

Démonstration : Assertion 1. Nous ne montrerons que le cas divisible (le cas non-classique est similaire, plus simple).

Lorsque la restriction $g : R' \rightarrow R$ est birationnelle, la conclusion résulte de ce que la composée de deux morphismes orbifoldes est un morphisme orbifolde (notant que $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifolde). Dans le cas général, composant les inclusions de R, R' dans X, X' avec les normalisations, nous pouvons supposer que R, R' sont lisses rationnelles (pour simplifier les notations).

Soit maintenant $b' \in R$ tel que $b := f(b') \in D_j$.

Soit $e(b')$ l'ordre de ramification de $g : R' \rightarrow R$ en b' , et $D'_j := f^{-1}(D_j)$.

On note aussi $e(b) := \text{pgcd}\{e(b'), b' \in f^{-1}(b) \cap R'\}$.

La formule de projection fournit pour les nombres d'intersection **locaux** près de b, b' :

$$m'_j.(D'_j.R')_{b'} = (f^*(D_j).R')_{b'} = (D_j.g_*(R))_b = e(b').(D_j.R)_b := e(b').t_{j,b}$$

D'où l'on déduit, par le théorème de Bezout, que, pour tout j tel que $g(b') \in D_j$, m'_j , et donc aussi m_j , divise $e(b).t_{j,b}$.

Donc : $\frac{m_j}{\text{pgcd}(t_{j,b}, m_j)}$ divise $e(b), \forall j$. Et $\text{ppcm}_j\{\frac{m_j}{\text{pgcd}(t_{j,b}, m_j)}\}$ divise donc $e(b)$.

Et donc, désignant par Δ' le plus petit diviseur orbifolde sur R faisant de l'inclusion (normalisée) de R dans X un morphisme Δ -orbifolde **divisible** : $m_{\Delta'}(b)$ divise $e(b)$. Donc : $K_{R'} \geq f^*(K_R + \Delta')$, ce qui achève la démonstration de l'assertion 1 du théorème \square

Remarquons que l'assertion 1 résulte aussi du lemme suivant, qui en donne une version quantitative, puisque $g(R') = g(R) = 0$:

Lemme 5.33 Soit $f : R' \rightarrow R$ un morphisme surjectif de degré $d > 0$ entre courbes projectives lisses et connexes. Pour tout $b' \in R'$, on note $e(b')$ l'ordre de ramification de f en b' , et pour $b \in R$, par $e(b) := \text{pgcd}\{e(b'), b' \in f^{-1}(b)\}$, et enfin par $e'(b) := \inf\{e(b'), b' \in f^{-1}(b)\} \leq e(b)$.

$$\text{Alors : } \frac{2(g(R')-1)}{d} \geq \frac{2(g(R)-1)}{d} + \sum_b (1 - \frac{1}{e(b)}) \geq \frac{2(g(R)-1)}{d} + \sum_b (1 - \frac{1}{e'(b)}).$$

Démonstration : Appliquant la formule de Riemann-Hurwitz à $f : R' \rightarrow R$, on obtient :

$$2g(R') - 2 = 2d.(g(R) - 1) + \sum_b \left(\sum_{\bar{b} \in f^{-1}(b)} (e(\bar{b}) - 1) \right) = 2d.(g(R) - 1) + \sum_b \left(d - \sum_{b' \in f^{-1}(b)} 1 \right)$$

Divisant par d , nous obtenons :

$$\frac{2(g(R') - 1)}{d} = \frac{2(g(R) - 1)}{d} + \sum_b \left(1 - \frac{\sum_{b'} 1}{\sum_{b'} e(b')} \right)$$

La conclusion résulte alors de ce que : $\frac{\sum_{b'} 1}{\sum_{b'} e(b')} \leq \frac{1}{e(b)} \leq \frac{1}{e'(b)}$ \square

\square Démonstration de l'assertion 2. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{g'} & X' \\ v \downarrow & & \downarrow f \\ R & \xrightarrow{g} & (X|\Delta) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les normalisations composées avec les inclusions, tandis que v est génériquement la restriction de f .

Soit $b' \in R', b := v(b')$, et t_j, t'_j respectivement les ordres de contacts en b et b' respectivement de D_j avec R , et de $f^{-1}(D_j)$ avec R' . Notons enfin $e(b') := e$ l'ordre de ramification en b' de v . La formule de projection (ou la commutativité du diagramme précédent) montre que :

$$f_*(R').D_j = e.g^*(D_j) = e.t_j = R'.f^*(D_j) = m_j.t'_j$$

Puisque X' est supposé lisse, t'_j est entier.

Notons $d_j := \text{pgcd}(t_j, m_j), u_j := t_j/d_j, m'_j := m_j/d_j$.

Donc $\text{pgcd}(u_j, m'_j) = 1$.

On déduit donc de l'égalité ci-dessus que, pour tout $j \in J(b)$, ensemble des j tels que $g(b) \in D_j$:

$$e.u_j = m'_j.t'_j,$$

De sorte que : u_j divise t'_j et m'_j divise e pour tout $j \in J(b)$.

Soit alors : $m' := \text{ppcm}\{m'_j, j \in J(b)\}$.

Alors m' divise e par ce qui précède. Posons : $e := e'.m'$.

L'assertion du théorème sera établie si l'on montre que $v : R' \rightarrow (R|\Delta_R)$ est étale (ie : si $e = m'$, ce qui équivaut ici à : $v^*(K_R + \Delta_R) = K_{R'}, \Delta_R$

étant le diviseur orbifold sur R attribuant à (tout) $b \in R$ la multiplicité m' précédente, qui est la plus petite faisant de $g : (R|\Delta_R) \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold divisible).

Nous allons montrer que $e' = 1$, ce qui établira donc le théorème.

Dans l'égalité suivante, les trois termes sont des entiers, et e' divise donc $e'' := \text{pgcd}(e, t'_j, j \in J(b))$:

$$e' \cdot \left(\frac{m'}{m'_j}\right) = \left(\frac{t'_j}{u_j}\right), \forall j \in J(b).$$

Dans des coordonnées locales adaptées, nous pouvons donc supposer (par lissité et revêtement étale local de X') que, si $s \in \mathbb{D}$ est une coordonnée locale sur R' , alors :

$$g'(s) = (s^{t'_1} \cdot (1 + s \cdot w_1(s)), \dots, s^{t'_n} \cdot (1 + s \cdot w_n(s)),$$

tandis que :

$$f \circ g'(s) = p_1(s^e), \dots, p_n(s^e),$$

les w_k, p_k et x_k ci-dessous étant des fonctions analytiques au voisinage de 0.

On a donc, sur un voisinage de $0 \in \mathbb{D}$, disque unité de \mathbb{C} :

$$p_k(s^e) = s^{t'_k \cdot m_k} \cdot (1 + s \cdot w_k(s)), \forall k := 1, \dots, n.$$

On en déduit que $e \cdot t_k = t'_k \cdot m_k$ et que $(1 + s \cdot w_k(s)) = 1 + s^e \cdot x_k(s^e)$, pour s assez voisin de $0 \in \mathbb{C}$, et $k = 1, \dots, n$. Donc :

$$g'(s) = (s^{t'_1} \cdot (1 + s^e \cdot x_1(s^e)), \dots, s^{t'_n} \cdot (1 + s^e \cdot x_n(s^e))).$$

Puisque g' est génériquement injective près de 0, on a bien :

$$\text{pgcd}(e, t'_k, k = 1, \dots, n) = 1.$$

Ce qui achève la preuve \square

Remarque 5.34 *Sous les hypothèses précédentes, la démonstration montre, plus généralement, que si $(R|\Delta_R) \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold, avec R une courbe irréductible, et si $R' \subset f^{-1}(R) \subset X'$ est une composante irréductible, alors $v : R' \rightarrow (R|\Delta)$ est orbifold-étale au sens suivant :*

Définition 5.35 Soit $f : (B'|\Delta_{B'}) \rightarrow (B|\Delta_B)$ un morphisme fini surjectif entre courbes lisses projectives et connexes B', B . On dit que f est **étale** si $f^*(K_B + \Delta_B) = K_{B'} + \Delta_{B'}$. Ceci équivaut à : $e(b').m'(b') = m(b)$ pour tout $b' \in B'$, $e(b')$ (resp. $m(b')$, resp. $m(b)$) désignant l'ordre de ramification en b' (resp. la multiplicité de $\Delta_{B'}$ en b' , resp. la multiplicité de Δ_B en $b := f(b')$).

Si $f : (B'|\Delta_{B'}) \rightarrow (B|\Delta_B)$ est étale, alors $(B'|\Delta_{B'})$ est rationnelle (resp. elliptique) si et seulement si $(B|\Delta_B)$ l'est. (On dit que $(B'|\Delta_{B'})$ est elliptique si $\deg(K_{(B'|\Delta_{B'})}) = 0$).

5.6 Quotients globaux : uniréglage et connexité rationnelle

Nous réduisons ici, grâce au théorème 5.32, l'étude des courbes Δ^{div} -rationnelles à celle des courbes rationnelles usuelles lorsque $(X|\Delta)$ est un quotient global au sens de 5.30.

Théorème 5.36 Soit $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ un quotient global au sens de la définition 5.30. Alors :

1. $(X|\Delta)^{div}$ est uniréglée si et seulement si X' est uniréglée.
2. $(X|\Delta)^{div}$ est $fRCC$ si et seulement si X' est $fRCC$.
3. $(X|\Delta)^{div}$ est RC si et seulement si X' est RC .
4. $(X|\Delta)^{div}$ est ARC si et seulement si X' est ARC .

Si $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ ramifie au moins au-dessus de $(X|\Delta)^{div}$, alors :

1. $(X|\Delta)^{div}$ est uniréglée si X' est uniréglée.
2. $(X|\Delta)^{div}$ est ARC si X' est RCC .

Démonstration : Elle est immédiate, d'après les définitions, et le théorème 5.32.

Exemple 5.37 Soit $(X|\Delta)$ l'exemple 5.31. Par 5.36 précédent, $(X|\Delta)^{div}$ est ARC .

Corollaire 5.38 Soit $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ un quotient global au sens de la définition 5.30. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(X|\Delta)^{div}$ est $fRCC$
2. $(X|\Delta)^{div}$ est RC
3. $(X|\Delta)^{div}$ est ARC

Démonstration : Evidente d’après 5.36 et l’équivalence entre les propriétés ARC et $fRCC = RCC$ pour X' (qui résulte de [Ko-Mi-Mo92]).

Corollaire 5.39 *Soit $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ un quotient global au sens de la définition 5.30. Si $(X|\Delta)$ est Fano (i.e : $-(K_X + \Delta)$ est ample sur X), alors :*

1. $(X|\Delta)^{div}$ est ARC .
2. $\pi_1(X|\Delta)$ est fini.

Remarque 5.40 *La démonstration de ce corollaire en supprimant l’hypothèse “quotient global” semble accessible à l’aide des champs de DM lisses. Voir aussi la remarque 5.9.*

Nous en déduisons maintenant une version faible de l’équivalence biméromorphe (qui n’est pas aussi évidente que lorsque $\Delta = 0$) :

Corollaire 5.41 *Soit $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ un quotient global au sens de la définition 5.30, avec $X \in \mathcal{C}$. Alors :*

1. La propriété d’évitement 5.21 est satisfaite par $(X|\Delta)$.

De plus, si $g : (X_1|\Delta_1) \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifold divisible biméromorphe, avec $g_(\Delta_1) = \Delta$, et $(X_1|\Delta_1)$ lisse, alors :*

2. $(X|\Delta)^{div}$ est uniréglée si et seulement si $(X_1|\Delta_1)^{div}$ est uniréglée.
3. $(X|\Delta)^{div}$ est RC si et seulement si $(X_1|\Delta_1)^{div}$ est RC .

Démonstration : Les propriétés 2. et 3. découlent de 1., grâce à 5.21. On va établir 1.

Soit $A \subset X$, analytique fermé de codimension au moins 2, et $A' \subset X'$ son image réciproque dans X' , qui y est de codimension au moins 2 puisque f est finie. Si on a une famille algébrique couvrante maximale de courbes Δ^{div} -rationnelles de X , elle fournit (grâce à 5.32 par image réciproque par g une famille algébrique couvrante maximale de courbes rationnelles de X' dont le membre générique évite donc A' . Leurs images par g évitent donc A , et sont des courbes rationnelles de $(X|\Delta)^{div}$ \square

Remarque 5.42 *Pour établir l’équivalence des conditions RCC^{div} et ARC^{div} , ainsi que l’invariance biméromorphe des conditions UR^{div} et RC^{div} , il suffit donc de le faire pour les champs de DM (et les conditions UR et RC dans cette catégorie). Voir aussi la remarque 5.9.*

Théorème 5.43 *Admettons la conjecture 5.26 précédente lorsque $\Delta = 0$. Alors cette conjecture est encore valable pour tout quotient global $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ au sens de la définition 5.30 ci-dessous.*

Démonstration : En effet : $f^*(K_X + \Delta) = K_{X'}$, de telle sorte que $\kappa(X|\Delta) = \kappa(X') = -\infty$. Donc X' est uniréglée (par 5.26), et donc aussi $(X|\Delta)$, par 5.32 \square

Corollaire 5.44 *Admettons la conjecture 5.26 lorsque $\Delta = 0$. Soit $(X|\Delta)$ un quotient global (au sens de 5.30), avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$, alors $(X|\Delta)$ est ARC^{div} .*

Démonstration : Soit $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ le morphisme fini faisant de $(X|\Delta)$ un quotient global. Alors $\kappa_+(X') = -\infty$, puisque $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$. Donc X' est ARC , par la conjecture 5.26 pour $\Delta = 0$. Donc $(X|\Delta)$ est aussi ARC , par 5.36 \square

5.7 Quotients globaux : le lemme de “scindage” orbifold.

Proposition 5.45 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse avec $X \in \mathcal{C}$ connexe, et C_t une famille algébrique couvrante de courbes Δ^Q -rationnelles. Alors : $(K_X + \Delta).C_t < 0$.*

Démonstration : D’après le théorème 2.41, on peut, quitte à modifier $(X|\Delta)$ dans $Georb^Q$, supposer que le membre générique de cette famille $(C_t)_{t \in T}$ est lisse et rencontre $Supp(\Delta)$ transversalement en des points lisses. Si la propriété est vraie sur l’orbifold modifiée, elle l’est sur $(X|\Delta)$, puisque l’effectivité numérique du fibré canonique orbifold croît par une telle modification.

On considère le graphe d’incidence normalisé $q : Z \rightarrow X$ de la famille, et en utilisant le fait que $q^*(K_X) \leq K_Z + q^*(\Delta)$, puisque la famille est couvrante. On conclut avec la formule d’adjonction : $(K_X + \Delta).C_t = q^*(K_X + \Delta).C'_t \leq (K_Z + q^*(\Delta)).C'_t = deg(K_{C'_t}) + q^*(\Delta).C'_t < 0$, puisque C'_t est $q^*(\Delta)$ -rationnelle, par 2.38 et 2.35. (On a noté C'_t l’image dans Z de C_t) \square

La question centrale d’existence de la géométrie des Δ -courbes rationnelles est la réciproque :

Question 5.46 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Soit $C \subset X$ une courbe projective irréductible non contenue dans le support de Δ . Soit $a \in C$, $a \notin \text{Supp}(\Delta)$. Si $(K_X + \Delta).C < 0$, existe-t'il une Δ -courbe rationnelle R passant par a ?

Si Δ est entière, on peut demander à R d'être, soit Δ^{div} -rationnelle (version forte), soit seulement $\Delta^{\mathbb{Z}}$ -rationnelle, ou même seulement $\Delta^{\mathbb{Q}}$ -rationnelle.

Nous allons déduire du classique “lemme de scindage” (“Bend and break”) de Miyaoka-Mori [Mi-Mo 86] une réponse positive à la version divisible dans le cas (très) particulier suivant.

Théorème 5.47 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, entière et à multiplicités finies. On suppose X projective. On suppose aussi qu'il existe un morphisme fini $f : X' \rightarrow X$, avec X lisse, ramifiant au moins au-dessus de Δ^{div} .

Soit $C \subset X$ une courbe projective irréductible, non contenue dans $\text{Supp}(\Delta)$, et telle que $(K_X + \Delta).C < 0$.

Alors : si $a \in C$ n'appartient pas au support de Δ , il existe une Δ^{div} -courbe rationnelle R de X passant par a .

Si H est un diviseur ample sur X , on peut choisir R telle que :

$$H.R \leq \frac{2.H.C}{-(K_X + \Delta).C}$$

Démonstration : Soit C' une composante irréductible de $f^{-1}(C)$. Alors $K_{X'}.C' = d.f^*(K_X + \Delta).C < 0$ si $f_*(C') = d.C$. Soit $H' := f^*(H)$. Si $a' \in C'$ est au-dessus de a , il existe, d'après [Mi-Mo 86], une courbe rationnelle R' passant par a' et telle que :

$$H'.R' \leq 2.\frac{H'.C'}{-(K_{X'}.C')}$$

Posant $R := f(R')$. Il suffit donc de montrer que R est une Δ^{div} -courbe rationnelle. Le théorème 5.32 ci-dessus achève donc la démonstration \square

Corollaire 5.48 Soit $(X|\Delta)$ et $f : X' \rightarrow X$ satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. On suppose que $(K_X + \Delta).C_t < 0$ pour une famille C_t

de courbes irréductibles de X recouvrant un ouvert (analytique) non vide de X . Alors un ouvert de Zariski non-vide de X est recouvert par une famille algébrique de courbes Δ^{div} -rationnelles R_s (i.e : $(X|\Delta)^{div}$ est uniréglée).

Si la famille C_t est algébrique, le H -degré des R_s satisfait la borne de 5.47.

Remarque 5.49 *L'hypothèse très restrictive de l'existence de $f : X' \rightarrow X$ dans les deux résultats précédents devrait pouvoir être supprimée en remplaçant ce revêtement par le champ algébrique (de Deligne-Mumford) associé à $(X|\Delta)$, et en établissant un “lemme de scindage” dans cette catégorie.*

5.8 Quotients globaux : semi-positivité générique.

La présente section est suggérée par une question orale d'Amaël Broustet ([Br 08]) : “peut-t-on étendre aux orbifolds géométriques le théorème de semi-positivité géométrique de Miyaoka (voir [Miy 87] et [SP 92]) ?”

On peut préciser :

Question 5.50 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse et finie, avec $X \in \mathcal{C}$. S'il existe des entiers strictement positifs m, p tels que $S^m \Omega^p(X|\Delta)$ ait un quotient \mathcal{Q} tel que $c_1(\mathcal{Q})$ ne soit pas pseudo-effectif, alors $(X|\Delta)$ est-elle uniréglée (i.e : génériquement recouverte par une famille de Δ -courbes rationnelles) ?*

On a une réponse positive lorsque $\Delta = 0$ si X est projective ([C-Pe 06]), et aussi dans la version divisible dans le cas (très) particulier suivant :

Théorème 5.51 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, entière et à multiplicités finies. On suppose X projective. On suppose aussi qu'il existe un morphisme fini $f : X' \rightarrow X$, avec X' lisse, ramifiant exactement au-dessus de Δ' .*

Alors $(X|\Delta)$ est uniréglée s'il existe des entiers strictement positifs m, p tels que $S^m \Omega^p(X|\Delta)$ ait un quotient \mathcal{Q} tel que $c_1(\mathcal{Q})$ ne soit pas pseudo-effectif, et si m est divisible par toutes les multiplicités de Δ .

Démonstration : C'est une réduction immédiate au cas où $\Delta = 0$. En effet : $f^*(S^m \Omega^p(X|\Delta)) = \text{Sym}^m(\Omega_{X'}^p)$ a pour quotient $f^*(\mathcal{Q})$, qui n'est pas

pseudo-effectif. Donc X' est uniréglée, par [C-Pe 06], theorem 0.3, et donc aussi $(X|\Delta)^{div}$, par 5.32 \square

Remarque 5.52 *Ici encore, on pourrait s'affranchir de l'hypothèse que $(X|\Delta)$ est un quotient global en établissant le résultat de [C-Pe 06] pour les champs algébriques de DM.*

5.9 Sections orbifoldes.

Cette section tente de formuler le théorème de [GHS 03] dans le cadre des orbifolles géométriques. Rappelons-le :

Théorème 5.53 ([G-H-S 03]) *Soit $g' : X' \rightarrow B'$ une fibration, avec X', B' projectives, lisses et connexes, et B' une courbe. Si la fibre générique de g' est RC, alors g' admet une section.*

Les bases orbifoldes dans $Georb^{div}$ ne discernent pas l'existence sections locales (voir l'exemple 5.57 ci-dessous). On doit donc ici, se placer dans la catégorie $Georb^Q$. Lorsque $(X|\Delta)$ est entière, une réponse affirmative à la question 5.15 permettrait de remonter les Δ^Q -courbes rationnelles obtenues en des Δ^{div} -courbes rationnelles.

Définition 5.54 *Soit $g : (X|\Delta) \rightarrow B$ une fibration sur une courbe projective lisse et connexe, $(X|\Delta)$ étant lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. Soit $\Delta_B = \Delta_B^Q := \Delta(g|\Delta)^Q$ la base orbifolde de (g, Δ) dans $Georb^Q$.*

Soit $j_C : C \subset X$ une courbe projective irréductible surjective (donc finie) sur B , de normalisation $\nu : \hat{C} \rightarrow C$, et non contenue dans $\text{Supp}(\Delta)$. On munit \hat{C} de la plus petite structure orbifolde entière $\Delta_C = \Delta_C^Q$ qui fait de l'inclusion normalisée $j_C \circ \nu : \hat{C} \rightarrow (X|\Delta)^Q$ un morphisme orbifolde.

Donc, $g_C := g \circ j_C \circ \nu : (\hat{C}|\Delta_C) \rightarrow (B|\Delta_B)^Q$ est un morphisme orbifolde.

*On dit que C est une **multisection** (resp. une **section**) de $(g|\Delta)$ si g_C est orbifolde-étale (i.e : si $(g_C)^*(K_B + \Delta_B) = K_{\hat{C}} + \Delta_C$) (resp. et si, de plus, g_C est de degré 1).*

Question 5.55 *Soit $g : (X|\Delta) \rightarrow B$ une fibration sur une courbe projective lisse et connexe, $(X|\Delta)$ étant lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. On suppose que la fibre orbifolde générique $(X_b|\Delta_b)$ de g est (RC^Q). (Donc X est Moishezon, et projective si X est Kähler). Alors :*

1. $(g|\Delta)$ a-t-elle une multisection $\sigma : B \rightarrow X$?
2. A-t-on : $\Delta_B^Z = 0$ si $\Delta^{vert} = 0$ (i.e : si $\text{Supp}(\Delta)$ ne contient aucune composante d'une fibre de g) ?
3. $(g|\Delta)$ a-t-elle une section orbifold si, de plus, $\Delta^{vert} = 0$?

Remarque 5.56 Si, dans la situation de 5.55, on suppose $(X|\Delta)$ entière, et si on considère $\Delta_B^{div} := \Delta(g|\Delta)^{div}$, base orbifold de (g, Δ) dans Georb^{div} , et de manière analogue, Δ_C^{div} , alors (g, Δ) n'a en général pas de multisection orbifold (voir l'exemple 5.57 ci-dessous).

Exemple 5.57 Considérons par exemple la seconde projection $f_0 : X_0 := \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1 := B$. On éclate d'abord X_0 aux trois points $(0, 0), (0, 1)$ et $(0, \infty)$. On obtient ainsi $u : X_1 \rightarrow X_0$ et sur X_1 , six (-1) -courbes F_0, F_1, F_∞ et E_0, E_1, E_∞ , où les F_i sont les transformés stricts des fibres $f^{-1}(i)$, et E_i le diviseur exceptionnel correspondant, image réciproque de $(0, i)$ pour $i = 0, 1, \infty$. On note $g := f_0 \circ u : X_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$.

Soit $3 \leq p < q$ deux entiers premiers entre eux. On munit X_1 du diviseur orbifold $\Delta_1 := (1 - 1/p).(E_0 + E_1 + E_\infty) + (1 - 1/q).(F_0 + F_1 + F_\infty)$. Alors $(X_1|\Delta_1)^Q$ n'a pas de courbe rationnelle orbifold g -horizontale $(B_1|\Delta_{B_1})$. En effet : $\Delta_{g, \Delta_1}^Q = (1 - 1/p).(\{0\} + \{1\} + \{\infty\})$, et donc : $\kappa((\mathbb{P}_1|\Delta_{g, \Delta_1}^Q)) = 1$. L'inclusion normalisée de B_1 dans X_1 composée avec g fournirait alors un morphisme $g_1 : (B_1|\Delta_{B_1})^Q \rightarrow (\mathbb{P}_1|\Delta_{g, \Delta_1}^Q)$ qui induirait pour tout N une inclusion $g_1^* : H^0(S^N(\Omega^1(\mathbb{P}_1|\Delta_{g, \Delta_1}^Q))) \rightarrow H^0(S^N(\Omega^1(B_1|\Delta_{B_1})))$. Ce qui implique que $\kappa(B_1|\Delta_{B_1}) \geq \kappa((\mathbb{P}_1|\Delta_{g, \Delta_1}^Q)) = 1$ et contredit la rationalité de $(B_1|\Delta_{B_1})^Q$.

Remarquer que, par contre, $\Delta_{g, \Delta_1}^{div} = 0$, puisque $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Dans le cas des quotients globaux, on peut encore réduire la solution de la question 5.55 au cas où $\Delta = 0$, résolu dans [GHS 03] :

Proposition 5.58 Soit $f : X' \rightarrow (X|\Delta)$ un quotient global au sens de 5.30. On suppose qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & (X|\Delta) \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ B' & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des fibrations, et où B', B sont des courbes projectives lisses et connexes. Alors :

1. $K_{B'} \leq h^*(K_B + \Delta(g, \Delta)^{div})$.
2. Si g' a une section σ' , alors : $K_{B'} = h^*(K_B + \Delta(g, \Delta)^{div})$, et $\Delta(g, \Delta)^{div} = \Delta(g, \Delta)^Z$. De plus :
3. Si g' a une section σ' , et si $B_1 :=$ est la normalisée de $f \circ \sigma'(B')$, munie de la plus petite structure orbifold $\Delta_{B_1}^{div}$ faisant de l'inclusion normalisée $i : (B_1 | \Delta_{B_1})^{div} \rightarrow (X | \Delta)^{div}$ un morphisme, alors $g : (B_1 | \Delta_{B_1})^{div} \rightarrow (B | \Delta_B)^{div}$ est étale.

Démonstration :

1. Soit $b' \in B'$, et $e(b') := e$ l'indice de ramification de h en b' . Soit $b := h(b') \in B$. Soit $x' \in X'$ tel que $g'(b') = b'$, et $x := f(x')$. Soit D une composante irréductible de $g^{-1}(b)$ contenant x , et D' une composante irréductible de $f^{-1}(D)$ contenant x' .

Alors près de x' et de x , on a :

$$t_D.m_\Delta(D).D' + \dots = f^*(g^*(b)) = (g \circ f)^*(b) = (h \circ g')^*(b) = g'^*(e.b') = e.d.D' + \dots,$$

en désignant par t_D (resp. d) la multiplicité de D (resp. D') dans la fibre de g au-dessus de b (resp. de g' au-dessus de b').

Puisque, par définition, $m_{\Delta_B^{div}}(b) = \text{pgcd}_{\{D\}}\{t_D.m_\Delta(D)\}$, on voit que $e(b')$ divise $m_{\Delta_B^{div}}(b)$, ce qui est l'assertion 1.

2. Si g' admet une section σ' telle que $\sigma'(b') = x'$, on a : $d = 1$. Donc : $e = t_D.m_\Delta(D) \geq m_{\Delta_B^Z}(b)$ divise $m_{\Delta_B^{div}}(b)$. Puisque $m_{\Delta_B^{div}}(b)$ divise (toujours) $m_{\Delta_B^Z}(b)$, on a l'égalité : $e = t_D.m_\Delta(D) \geq m_{\Delta_B^Z}(b) = m_{\Delta_B^{div}}(b)$, pour tout $b \in B$, ce qui est l'assertion 2.

Remarquons que $e = t_D$ si $m_\Delta(D) = 1$.

3. On en déduit donc que $f \circ \sigma' : B' \rightarrow (B_1 | \Delta_{B_1})^{div}$ est orbifold-étale au sens de 5.35. En effet, si u, v sont des morphismes divisibles de courbes dont le composé est orbifold-étale, chacun des deux l'est aussi.

Puisque la composée $h = (g \circ f \circ \sigma') : B' \rightarrow (B | \Delta_B)^{div}$ est orbifold-étale (par 2. ci-dessus), on en déduit que $g : (B_1 | \Delta_{B_1})^{div} \rightarrow (B | \Delta_B)^{div}$ est aussi orbifold-étale \square

Corollaire 5.59 Dans la situation du diagramme de 5.58, si les fibres de g' sont RC, alors g' a une section σ' (d'après 5.53), et donc (d'après 5.58) :

1. $K_{B'} = h^*(K_B + \Delta(g, \Delta)^{div})$ (autrement dit : h est orbifold-étale au sens de 5.35).
2. $\Delta(g, \Delta)^{div} = \Delta(g, \Delta)^Z$.

3. $g : (B_1|\Delta_{B_1})^{div} \rightarrow (B|\Delta_B)^{div}$ est étale au sens de 5.35.
4. En particulier, si $(B|\Delta_B)^{div}$ est rationnelle, $(X|\Delta)^{div}$ et X' sont RC.
5. Si $\Delta^{vert} = 0$, $h : B' \rightarrow B$ est étale, et $\Delta_B^Z = 0$. Si $B \cong \mathbb{P}^1$, alors (g, Δ) a une section.

Démonstration : Seule l'assertion 5. ne résulte pas de 5.58, et est démontrée. Puisque $\Delta^{vert} = 0$, $\Delta(g, \Delta)^Z = \Delta(g)^Z$. Les fibres de g' étant RC, celles de g le sont aussi, et $\Delta(g)^Z = 0$, d'après [GHS 03]. Les autres assertions en sont des conséquences directes \square

Remarque 5.60 *L'énoncé de [GHS 03] dans la catégorie des champs de DM lisses fournirait donc, avec les arguments ci-dessus, une réponse affirmative à la question 5.55.*

Nous allons maintenant renforcer la question 5.55 posée ci-dessus :

Conjecture 5.61 *Soit $g : (X|\Delta) \rightarrow B$ une fibration, avec X, B projectives, lisses et connexes, $(X|\Delta)$ entière, et B une courbe. On suppose que la fibre orbifold générique $(X_b|\Delta_b)^{div}$ de g est lisse et RC, et que le support de Δ n'a pas de composante irréductible g -verticale (ie : contenue dans une fibre de g). Soit $E \subset X$ est un sous-ensemble fini en chaque point duquel la fibre de g est lisse et réduite.*

Alors (g, Δ) admet une section orbifold σ dont l'image contient E .

De manière équivalente, pour toute composante irréductible D_j , de multiplicité m_j , du support de Δ , et tout b de B , l'ordre de contact en $\sigma(b)$ de D_j avec $\sigma(B)$ est divisible par m_j , si $\sigma(b) \in D_j$.

Remarque 5.62 *Il est clair que la conjecture 5.61 fournit une section orbifold de (g, Δ) (au sens de 5.53) dans la situation particulière où Δ n'a pas de composante g -verticale.*

La conjecture 5.61 est la version orbifold géométrique de la suivante :

Conjecture 5.63 ([H-T 04]) *Soit $g : X \rightarrow B$ une fibration, avec X, B projectives, lisses et connexes, et B une courbe. Si la fibre générique de g est RC, et si $E \subset X$ est un sous-ensemble fini en chaque point duquel la fibre de g est lisse et réduite, alors g admet une section dont l'image contient E .*

Proposition 5.64 *Soit $g : (X|\Delta) \rightarrow B$ une fibration, avec X, B projectives, lisses et connexes, $(X|\Delta)$ entière, et B une courbe. On suppose que la fibre orbifold générique $(X_b|\Delta_b)$ de g est RCC^{div} .*

Admettons la conjecture 5.61.

1. *Alors (g, Δ) a une multisection orbifold au sens de 5.53.*
2. *En particulier, si $(X|\Delta)$ est lisse et si $(B|\Delta_{g,\Delta})^Q$ est rationnelle, alors $(X|\Delta)$ est RCC^{div} .*

Démonstration :

Soit $\Delta_B := \Delta_{g,\Delta}^Q = \sum_{b \in B} (1 - \frac{1}{m(b)}) \cdot \{b\} = \sum_k (1 - \frac{1}{m_k}) \cdot \{b_k\}$, avec : $m_k := m(b_k) := \inf_j \{t_j \cdot m_\Delta(F_j)\}$, si $g^*(b_k) = \sum_j t_j \cdot F_j$. Pour chacun des b_k , soit j_k un indice tel que $t_{j_k} \cdot m_\Delta(F_{j_k}) = m_k$. Posons : $m_k(g) := t_{j_k}$, et $\Delta_g := \sum_k (1 - \frac{1}{m_k(g)}) \cdot \{b_k\}$.

Il existe alors un revêtement orbifold étale : $u : B' \rightarrow (B|\Delta_g)^{27}$. On considère $g' : X' := \widehat{X \times_B B_1} \rightarrow B_1$, déduit de g par changement de base et normalisation. Alors l'image réciproque F'_{j_k} de chacun des F_{j_k} est une composante réduite de la fibre de g' au-dessus de $b'_k := u^{-1}(b_k)$. Notons $f : X' \rightarrow X$ la projection naturelle. Choissant pour chaque k un point lisse E_k de F'_{j_k} , et notant E la réunion des E_k , on peut appliquer la conjecture 5.61 à $(X'|f^*(\Delta^{hor}))$, où Δ^{hor} est la partie g -horizontale de Δ . On obtient ainsi une section σ' de g contenant E , et ayant les ordres de tangence requis le long de $f^*(\Delta)^{hor}$.

On vérifie immédiatement que $B_1 := f(\sigma'(B'))$ est une (multi)section orbifold de $g : (X|\Delta) \rightarrow B$. La dernière assertion est alors évidente \square

5.10 Quotients rationnels orbifoldes

Théorème 5.65 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse et entière, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Il existe une unique fibration méromorphe dominante $R := R_{(X|\Delta)} : X \dashrightarrow R(X|\Delta)$, qui est presque-holomorphe, telle que²⁸ :*

1. *Les fibres orbifoldes de R sont $fRCC$.*
2. *Si $y \in R(X|\Delta)$ est général, la fibre X_y de R au-dessus de y ne rencontre aucune courbe rationnelle orbifold de $(X|\Delta)$.*

²⁷Sauf si $B = \mathbb{P}_1$, et si le support de Δ_g a 1 ou 2 éléments. Dans ce cas, on choisit simplement $B' = B$. La courbe B_1 résultant de la construction qui suit ne sera pas une section orbifold, mais sera une courbe Δ^{div} -rationnelle, ce qui suffit pour nos applications.

²⁸Ici encore, le résultat et sa démonstration sont valables pour les trois notions de Δ -courbe rationnelle. On précisera $R^*, * = div, Z, Q$ si besoin est.

Remarque 5.66 *L'exemple 5.16 montre que cette fibration n'est pas toujours un invariant biméromorphe de l'orbifolde $(X|\Delta)$, lorsque celle-ci a une singularité non klt.*

Démonstration : Nous utilisons ici (brièvement) l'appendice technique 5.13 ci-dessous.

Si $(X|\Delta)$ n'est pas uniréglée, $R = id_X$. Sinon, on désigne par $A \subset \mathcal{C}(X)$ l'ensemble des points paramétrant une courbe rationnelle orbifolde (réduite) de $(X|\Delta)$. On va montrer que A est \mathbb{Z} -régulier (au sens de 5.83). La conclusion résultera alors de 5.84. Soit donc $B \subset \mathcal{C}(X)$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible (donc compact, par [Lieb78]) tel que Z_a soit une courbe rationnelle orbifolde réduite de $(X|\Delta)$ pour $a \in A' := A \cap B$, A' non contenu dans une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques fermés stricts de B . Quitte à considérer une modification $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$, biméromorphe orbifolde minimale transverse à la famille B , le membre générique Z'_b de la famille, paramétrée par B , de X' obtenue par transformée stricte par u est donc une courbe rationnelle de X' , par le théorème 2.41. Soit $Z' \subset B \times X'$ le graphe d'incidence (normalisé) de la famille $Z'_b, b \in B$, muni de ses projections $p' : Z' \rightarrow X'$ et $q' : Z' \rightarrow B$. Au-dessus d'un ouvert de Zariski dense B^* de B , q' est une submersion de fibre \mathbb{P}_1 . Soit $\Delta_{Z'}$ la plus petite structure orbifolde sur Z' rendant $p' : (Z'|\Delta_{Z'}) \rightarrow (X'|\Delta')$ un morphisme orbifolde. Par transversalité, la restriction transverse de $\Delta_{Z'}$ à Z'_b est aussi la restriction de Δ à Z_b (voir 2.41). Cette restriction est donc une courbe Δ -rationnelle pour tout $a \in A''$. Puisque A'' n'est pas contenu dans un sous-ensemble analytique fermé strict de B , la restriction $(Z'_b|\Delta'_{Z',b})$ de $\Delta_{Z'}$ à Z'_b est donc une courbe rationnelle orbifolde pour $b \in B$ générique. En fait, il existe une structure orbifolde fixe Δ_P sur \mathbb{P}_1 (à automorphisme près de \mathbb{P}_1) telle que $(Z'_b|\Delta'_{Z',b})$ soit une courbe rationnelle orbifolde isomorphe à $(\mathbb{P}^1|\Delta_P)$, pour $b \in B$ générique. Il en est donc de même pour la restriction de Δ à Z_b , $b \in B$ générique, puisque ces deux restrictions coïncident \square

Question 5.67 *La fibration R précédente est-elle un invariant biméromorphe de l'orbifolde $(X|\Delta)$ si celle-ci est finie? Ceci semble pouvoir être démontré en observant que les fibres d'un éclatement centré en l'intersection de $m \geq 2$ composantes du support de Δ sont des projectifs munis d'une structure orbifolde finie supportée par les hyperplans de coordonnées, et donc ARC, par (la généralisation immédiate de) l'exemple 5.37.*

Definition 5.68 Soit $(X|\Delta)$ lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. On dit que $(X|\Delta)$ est

1. **fortement rationnellement connexe** si, toute orbifolde lisse biméromorphiquement équivalente à $(X|\Delta)$ est $fRCC$.

2. **rationnellement engendrée** si, pour toute fibration $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$, toute base orbifolde stable de $(f|\Delta)$ est UR ²⁹.

On note alors : $(X|\Delta)^*$ est $FRCC$ (resp. RE), ou $(X|\Delta)$ est $FRCC^*$ (resp. RE^*), si l'on veut préciser la catégorie $Georb^*$ dans laquelle on s'est placé.

Remarque 5.69

1. Si $(X|\Delta)$ est RE^* avec $\dim(X) > 0$, elle est UR^* .

2. Les propriétés RE^* et $FRCC^*$ sont, par définition, préservées par équivalence biméromorphe. On a l'implication : $FRCC^* \implies RE^*$. Soit, en effet, $g : (X'|\Delta') \rightarrow Y$ une fibration holomorphe nette, avec $(X'|\Delta')$ biméromorphe à $(X|\Delta)$. Puisque $(X'|\Delta')$ est $fRCC$, elle est recouverte par une famille de Δ' -courbes rationnelles non contenues dans les fibres de g , et dont les images par g fournissent donc un uniréglage de sa base orbifolde.

3. Lorsque $\Delta = 0$, et X projective (ou Kähler compacte), on a équivalence entre les conditions RE et RC . On établit cette équivalence en considérant le “quotient” rationnel de X , et en appliquant [GHS 03]. Voir 5.78 pour le cas général.

Question 5.70 Les propriétés $FRCC$ et RE sont-elles équivalentes ?

Corollaire 5.71 Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse et entière, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Il existe une unique fibration méromorphe dominante $\bar{R} := \bar{R}_{(X|\Delta)} : X \dashrightarrow R(X|\Delta)$ telle que³⁰ :

1. Les fibres orbifoldes de R sont $FRCC$.

2. Si $y \in R(X|\Delta)$ est général, la fibre X_y de R au-dessus de y ne rencontre aucune courbe rationnelle orbifolde de $(X|\Delta)$.

Démonstration : Si $u : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est une modification biméromorphe orbifolde, l'image par u de la fibre générique de $R_{(X'|\Delta')}$ est contenue dans une fibre de $R_{(X|\Delta)}$, puisque son image est $fRCC$. On choisit pour \bar{R} la fibration dont la fibre générique est l'image dans X d'une fibration $R_{(X'|\Delta')}$ dont la dimension des fibres est minimum. Cette fibration est

²⁹Ici encore, on peut se placer dans l'une des trois catégories $Georb^*$.

³⁰Ici encore, le résultat et sa démonstration sont valables pour les trois notions de Δ -courbe rationnelle. On précisera \bar{R}^* , $*$ = div, Z, Q si besoin est.

un invariant biméromorphe, car si $(X|\Delta)$ et $(X_1|\Delta_1)$ sont (élémentairement) dominées par $(X^+|\Delta^+)$, les fibrations \bar{R} définies ci-dessus coïncident pour $(X|\Delta)$ et $(X^+|\Delta^+)$, ainsi que pour $(X_1|\Delta_1)$ et $(X^+|\Delta^+)$, donc aussi pour $(X|\Delta)$ et $(X_1|\Delta_1)$. Les fibres orbifoldes de \bar{R} sont *FRCC* : on peut supposer que $\bar{R} = R$ (ie : que la dimension des fibres de R est minimum). Si la fibre orbifold $(X_y|\Delta_y)$ générique de R n'est pas *FRCC*, il existe un modèle biméromorphe $(X'_y|\Delta'_y)$ de cette fibre telle que la fibration R associée (qui est presque-holomorphe) $R'_y : (X'_y|\Delta'_y) \rightarrow Z'_y$, avec $\dim(Z'_y) > 0$. Les arguments de 8.21 fournissent alors une factorisation : $R = h \circ g$, avec $g : (X|\Delta) \rightarrow Z$ et $h : Z \rightarrow Y$, avec $\dim(Z) > \dim(Y)$ telle que les fibres génériques de g soient les images dans X de celles des R'_y . On en déduit, par transformée stricte de Δ , l'existence d'une orbifold lisse $(X'|\Delta')$ biméromorphe à $(X|\Delta)$ et pour laquelle la fibration R coïncide avec g , contredisant la minimalité de la dimension des fibres de R . La propriété 2 est évidente, puisque $\bar{R} = R$ \square

Proposition 5.72 *Soit $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ une fibration méromorphe dominante, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe, et $(X|\Delta)$ lisse. Si la fibre orbifold (générique) $(X_y|\Delta_y)^*$ et la base orbifold stable de f , sont RE^* , alors $(X|\Delta)$ est RE^* .*

Démonstration : Le résultat est trivial si $Y = X$. On suppose donc que $\dim(Y) < \dim(X)$. Les fibres de f sont RE , donc uniréglées. Soit $g : (X|\Delta) \dashrightarrow Z$ une fibration méromorphe dominante. On peut supposer, par le théorème 2.41, que g est holomorphe nette. Si g ne se factorise pas par f , la base orbifold stable de g est uniréglée, puisque recouverte par les images par g des fibres orbifoldes de f , qui sont RE , par hypothèse, et dont les images (munies de leur structures orbifoldes restreintes) par g sont donc uniréglées. Sinon, $g = h \circ f$, avec $f : X \rightarrow Y$ et $h : Y \rightarrow Z$ que l'on peut supposer holomorphes et nettes, par 2.41. La base orbifold de $h : (Y|\Delta_{f,\Delta}) \rightarrow Z$ est aussi celle de f (par la propriété 3.13). Donc la base orbifold de f est RE , puisque celle de g est RE , par hypothèse \square

Corollaire 5.73 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Il existe³¹ une unique fibration méromorphe dominante*

$R_* := R_{*(X|\Delta)} : X \dashrightarrow R_*(X|\Delta)$ *telle que :*

1. *Les fibres orbifoldes de R_* sont RE .*
2. *L'une des bases orbifoldes stables de R_* n'est pas uniréglée.*

³¹Le résultat est valable pour les trois notions de Δ -courbe rationnelle.

Démonstration : Si $(X|\Delta)$ n'est pas UR , on prend $R_* := id_X$. Sinon, on considère la fibration \bar{R} donnée par 5.71. Ses fibres sont FRC , donc RE .

Si l'une des bases orbifoldes stables de R_0 n'est pas uniréglée, on définit : $R = R_0$. Sinon, on définit, par récurrence sur $\dim(X)$: $R_* := (R_B)_* \circ R_0$, si B est une base orbifold stable de R_0 , et $(R_B)_*$ la fibration R_* correspondante. Les fibres orbifoldes de la fibration composée sont bien RE , par 5.72 \square

Remarque 5.74 *Si l'implication $RE \implies fRCC$ est vraie lorsque les multiplicités sont finies, alors $R = R_*$. Ce serait le cas si les questions 5.14 avaient une réponse positive.*

On peut du moins étendre au cas RE certaines des propriétés valables dans le cas RC .

Proposition 5.75 *Soit $(X|\Delta)$ lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. Alors :*

1. *Si $(X|\Delta)^Q$ est RE , on a : $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$.*
2. *Si $(X|\Delta)^{div}$ est RE et finie, on a : $\pi_1(X|\Delta)$ est fini.*

Démonstration : L'assertion 2 sera établie en 11.25. Pour démontrer l'assertion 1, il suffit, par la construction de R_* , de montrer que si $r : (X|\Delta) \rightarrow R$ est une fibration dont les fibres orbifoldes génériques $(F|\Delta_F)$ sont UR^Q , et dont la base orbifold stable $(R|\Delta_R)$ satisfait : $\kappa_+(R|\Delta_R) = -\infty$, alors : $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$. Mais ceci résulte des arguments fournis en 5.25 \square

Corollaire 5.76 *Admettons la conjecture 5.26. Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$, alors $(X|\Delta)$ est RE .*

Démonstration : Soit $R_* := R_{*(X|\Delta)} : X \dashrightarrow R_*(X|\Delta)$ la fibration construite en 5.73. Sa base est de dimension nulle, puisque $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$. Donc $(X|\Delta)$ est RE \square

Remarque 5.77 *Admettant une autre conjecture ($C_{n,m}^{orb}$, voir §6.1), nous construirons en 6.14 une variante de la fibration R_* : ses fibres orbifoldes générales ont $\kappa_+ = -\infty$, et sa base orbifold stable est de dimension canonique $\kappa \geq 0$ (elle n'est donc pas uniréglée). Si 5.26 est vraie, ces deux fibrations coïncident.*

5.11 Quotients globaux : l'implication $RE \implies RC$.

Lorsque $\Delta = 0$, et X projective (ou Kähler compacte), on a équivalence entre les conditions RE et RC . On établit cette équivalence en considérant le “quotient” rationnel de X , et en appliquant [GHS 03].

Question 5.78 *Soit $(X|\Delta)$ lisse, finie et entière, avec $X \in \mathcal{C}$. Si $(X|\Delta)$ est RE^{div} , est-elle RC^{div} ?*

La question nécessite, pour être résolue affirmativement, de pouvoir :

1. montrer que la condition RC^{div} est biméromorphiquement préservée. Ce qui résulterait de la condition d'évitement des lieux de codimension au moins 2 (énoncée dans 5.21).

2. montrer que si $g : (X|\Delta) \rightarrow B$ est une fibration sur une courbe, avec des fibres orbifoldes génériques RC^{div} , alors il existe une courbe Δ^{div} -rationnelle surjective sur B si $(B|\Delta_{g,\Delta}^Z)$ est rationnelle. Ce qui est le cas si (g, Δ) a une multisection (au sens de 5.54).

Nous allons donner, conditionnellement en la condition d'évitement 5.21, une réponse affirmative pour les quotients globaux.

Théorème 5.79 *Soit $X' \rightarrow (X|\Delta)$ un quotient global (voir 5.30). Si $(X|\Delta)$ est RE^{div} , il est $(ARC)^{div}$ si la condition (C) suivante est satisfaite :*

(C) *Toute $(Z|\Delta_Z)$ lisse, entière et finie qui est UR^{div} contient, pour tout $A \subset Z$, Zariski-fermé de codimension au moins 2, une famille algébrique couvrante de courbes Δ_Z^{div} -rationnelles dont le membre générique ne rencontre pas A .*

Démonstration : Il nous suffit de montrer que X' est RC , par 5.36. Nous pouvons supposer que le revêtement $f : X' \rightarrow X$ est Galoisien de groupe G , fini (voir 5.30). Soit donc $g' : X' \dashrightarrow Y'_0$ le quotient rationnel de X' ([Ca 92], [Ko-Mi-Mo 92]) : ses fibres sont RC et sa base n'est pas uniréglée si ce n'est pas un point. Supposons donc $\dim(Y'_0) > 0$. Nous allons montrer que Y'_0 est uniréglé, ce qui établira le résultat. La fibration g' est préservée par le groupe G . Soit $h_0 : Y'_0 \rightarrow Y_0 := Y/G$ le quotient naturel. Il existe donc une application $g : X \dashrightarrow Y_0 := Y/G$ telle que $g \circ f = h_0 \circ g'$.

Il existe donc des modifications $u : X_1 \rightarrow Y$ et $u' : X'_1 \rightarrow X'$, ainsi que des applications holomorphes $f_1 : X'_1 \rightarrow X_1$ et $h : Y' \rightarrow Y$ telles que :

1. $h \circ g'_1 = g_1 \circ f_1 : X'_1 \rightarrow Y$, les applications u' et f_1 étant G -équivariantes.

2. Pour toute structure orbifold Δ_1 sur X_1 telle que $u_*(\Delta_1) = \Delta$ et telle que $u : (X_1|\Delta_1)^{div} \rightarrow (X|\Delta)^{div}$ soit un morphisme orbifold, alors : (puisque $(X|\Delta)$ est RE^{div} par hypothèse), la base orbifold $(Y|\Delta_Y)$ est lisse et uniréglée, avec $\Delta_Y := (\Delta_{g_1, \Delta_1})^Z$.

3. $h : Y' \rightarrow Y$ est finie (mais Y' est seulement normal), et est un revêtement Galoisien de groupe H , quotient de G .

Il existe donc sur Y une unique structure orbifold Δ'_Y telle que $h : Y' \rightarrow Y$ ramifie **exactement** au-dessus de Δ'_Y . On peut, de plus, puisque $(X|\Delta)$ est, par hypothèse, RE^{div} , supposer que :

4. Δ'_Y divise Δ_Y (i.e : $m_{\Delta'_Y}(E)$ divise $m_{\Delta_Y}(E)$, $\forall E \in W(Y)$).

En effet : soit $E \in W(Y)$ telle que $m'(E)$ ne divise pas $m(E)$, notant $m'(E)$ (resp. $m(E)$) la multiplicité de E relative à Δ'_Y (resp. Δ_Y).

Il existe donc $D \in W(X_1)$ tel que $m(E) = t_E(D).m_{\Delta_1}(D)$, avec $g_1^*(E) = t_E(D).D + \dots$, et $t_E(D) > 0$, i.e : $g_1(D) = E$.

On a alors 2 cas : ou bien D est u -exceptionnel, ou bien $u(D) = D_j \in W(X)$.

Dans le premier cas, on peut augmenter $m_{\Delta_1}(D)$ de telle sorte que $t_E(D).m_{\Delta_1}(D)$ soit un multiple de $m'(E)$: $(Y|\Delta_Y)$ reste uniréglée, puisque, par hypothèse, toute base orbifold stable de (g, Δ) est uniréglée.

Dans le second cas, si $D' \in W(X')$ et si $g_1'(D') = E'$, et $h(E') = E$, on a : $(h \circ g_1')^*(E) = g_1'^*(m'(E).E') + \dots = (t'_{E'}(D').m'(E)).D' + \dots = (g_1 \circ f_1)^*(E) = f_1^*(t_E(D).D + \dots) = (t_E(D).m_{\Delta}(D_0)).D + \dots$, où $D_0 := u(D)$, puisque l'ordre de ramification de f_1 au-dessus de D coïncide avec celui de f au-dessus de D_0 .

On a donc (puisque f_1 et h sont Galoisien, et que seuls des diviseurs non $g_1 \circ f_1$ -exceptionnels interviennent) :

$$t'_{E'}(D').m'(E) = t_E(D).m_{\Delta}(D_0) = t_E(D).m_{\Delta_1}(D) =: m(E).$$

Donc : $m'(E)$ divise $m(E)$.

En répétant un nombre fini de fois cette construction (au plus autant de fois que le nombre de diviseurs D qui sont u -exceptionnels dans les images réciproques par g_1 des composantes du support de Δ_1), on obtient la divisibilité annoncée.

Soit alors $B \subset Y$ une courbe Δ_Y^{div} -rationnelle, membre générique d'une famille couvrante de telles courbes. C'est, a fortiori, une courbe $(\Delta'_Y)^{div}$ -rationnelle, et on a donc : $(K_Y + \Delta'_Y).B < 0$. Soit $Z' \subset Y'$ le lieu singulier de Y' , et $Z := h(Z') \subset Y$. Donc, Z est de codimension au moins 2 dans Y . Puisque $(Y|\Delta_Y)$ satisfait la condition (C) par hypothèse, nous pouvons supposer que B évite Z . Soit B' une composante irréductible de $h^{-1}(B)$,

membre d'une famille couvrante de Y' , avec $h_*(B') = d.B$, $d > 0$: on a donc : $K_{Y'}.B' = d.(K_Y + \Delta'_Y).B < 0$. Par [Mi-Mo 86], Y' est uniréglé, et le théorème démontré \square

5.12 Hyperbolicité algébrique.

Cette section est inspirée par une discussion avec Aaron Levin.

Question 5.80 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse et entière, X projective. On suppose que $\kappa(K_X + \Delta) = n := \dim(X) > 0$. Alors existe-t-il un sous-ensemble algébrique $A \subsetneq X$ contenant toutes les courbes Δ^{div} -rationnelles et Δ^{div} -elliptiques (au sens divisible, donc³²) de X ? Et plus généralement, existe-t'il $A' \subsetneq X$ algébrique, contenant toutes les sous-variétés $V \subset X$ dont les restrictions minimales $(V'|\Delta')$ de Δ (au sens de 2.34) ne sont pas toutes de type général ?*

Remarque 5.81 *Un cas connu est celui des orbifolde logarithmiques $(\mathbb{P}^n|H_d|D)$, si $H_d \subset \mathbb{P}^n$ est une hypersurface lisse générale de dimension n et de degré $d \geq 2n+1$. (Voir [P-R 06], et [B 95, thm 1.5.2] pour une approche différente dans le cas des surfaces). Le cas propre (où $X = H_d$, $\Delta = 0$) a été traité auparavant par H. Clemens et C. Voisin).*

5.13 Appendice : Quotients méromorphes.

Nous rappelons ici les résultats de [Ca04, appendice] (auquel nous renvoyons pour les démonstrations et plus de détails). Ils seront utilisés dans le présent texte dans les §5.65 et 11.5.

Soit $X \in \mathcal{C}$, normal et connexe. On note $\mathcal{C}(X)$ ou $\text{Chow}(X)$ la variété de Chow (ou espace des cycles) de X construit dans [Ba75]. Pour $a \in \mathcal{C}(X)$, on note $Z_a \subset X$ le support du cycle paramétré par a .

On note $A \subset \mathcal{C}(X)$ un sous-ensemble (ensembliste). On supposera toujours que la famille A est **couvrante**, c'est-à-dire que la réunion des Z_a , $a \in A$ est X . Soit $R_A \subset X \times X$ la relation d'équivalence pour laquelle deux points de X sont équivalents si et seulement s'ils sont contenus dans A -chaîne, ie : une réunion finie *connexe* de Z_a , $a \in A$.

Si $V \subset X$ est analytique fermé irréductible, on dira que $V \in A$ s'il existe $a \in A$ tel que $Z_a = V$.

³² On peut se poser la question, plus difficile, pour le cas non-divisible également.

Théorème 5.82 *On suppose A analytique fermé dans $\mathcal{C}(X)$. Il existe alors une unique fibration $q_A : X \dashrightarrow Q_A$, qui est presque-holomorphe (voir 8.16), et telle que pour $b \in Q_A$ général (générique si A a un nombre fini de composantes), la fibre $X_b = q_A^{-1}(b)$ est la classe de R_A -équivalence de chacun de ses points. La fibration q_A est appelée le A -quotient de X .*

Définition 5.83 *On dit que $A \subset \mathcal{C}(X)$ est Z -régulier si, pour tout $B \subset \mathcal{C}(X)$, analytique fermé et irréductible, $A \cap B$ soit contient une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses de B , soit est contenu dans une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques fermés stricts de B .*

Si A est Z -régulier, il existe une unique réunion finie ou dénombrable de sous-ensembles analytiques fermés irréductibles sans inclusions B_n de $\mathcal{C}(X)$ (appelés les composantes de A), tels que, pour chaque n , $A \cap B_n$ contienne une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses de B_n , et tels que A soit contenu dans la réunion des B_n . On note B la réunion des B_n .

Théorème 5.84 *Soit $A \subset \mathcal{C}(X)$, Z -régulier et couvrant. Soit $q_A : X \dashrightarrow Q_A$ le B -quotient, B étant la réunion des composantes de A dans $\mathcal{C}(X)$. Si $b \in Q_A$ est général, et si $Z_a, a \in A$, rencontre X_b , alors $Z_a \subset X_b$.*

Définition 5.85 *Soit $A \subset \mathcal{C}(X)$, $X \in \mathcal{C}$. On dit que A est **stable** si, pour tout $V \subset X$ analytique fermé irréductible muni d'une fibration méromorphe dominante $g : V \dashrightarrow W$, alors $V \in A$ si :*

1. *Les fibres générales de g sont dans A .*
2. *Il existe $Z \subset V$, $Z \in a$ tel que $g(Z) = W$.*

Théorème 5.86 *Soit $A \subset \mathcal{C}(X)$, Z -régulier et couvrant. Soit $q_A : X \dashrightarrow Q_A$ le B -quotient, B étant la réunion des composantes de A dans $\mathcal{C}(X)$. Si A est stable, et si $b \in Q_A$ est général, alors $X_b \in A$.*

6 ADDITIVITÉ ORBIFOLDE

On va rappeler ici certaines conjectures et résultats de [Ca04, §4, pp. 564-574] auquel nous renvoyons pour les démonstrations et détails. Ces résultats sont techniquement essentiels pour établir les résultats principaux du présent texte (le “coeur” et sa décomposition).

6.1 La conjecture $C_{n,m}^{orb}$.

Conjecture 6.1 (*Conjecture $C_{n,m}^{orb}$*) Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow S$ une fibration holomorphe, l’orbifolde géométrique $(Y|\Delta)$ étant lisse avec Y compacte et connexe dans la classe \mathcal{C} .

Alors $\kappa(Y|\Delta) \geq \kappa(Y_s|\Delta_s) + \kappa(f|\Delta)$

On a noté $(Y_s|\Delta_s)$ la fibre orbifolde de f au-dessus du point général $s \in S$. (Remarquons que cette orbifolde géométrique est lisse, par le théorème de Sard, et $\kappa(Y_s|\Delta_s)$ est indépendant de $s \in S$, général, par le théorème de cohérence des images directes de Grauert, appliqué aux $f_*(m(K_Y + \Delta))$, $m > 0$ assez divisible).

Remarque 6.2 1. Ici comme partout ailleurs³³, les coefficients des composantes de Δ sont rationnels dans $[0,1]$, et pas nécessairement de la forme “standard” $(1 - \frac{1}{m})$.

2. Lorsque f est nette (au sens de 3.8), on a aussi : $\kappa(f|\Delta) = \kappa(S|\Delta(f, \Delta))$.

3. Cette conjecture est évidemment la version orbifolde de la conjecture $C_{n,m}$ d’Itaka, qui affirme que $\kappa(Y) \geq \kappa(Y_s) + \kappa(S)$ si Y est projective.

4. Cette conjecture a de nombreuses conséquences, dont certaines seront développées ci-dessous au §10. L’une d’entre elles est l’inégalité : $\kappa(X|\Delta) \geq \kappa(Y|\Delta_Y)$ si l’on a un morphisme orbifolde surjectif $f : (X|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ entre orbifoldes lisses, compactes et connexes, et si $\kappa(X|\Delta) \geq 0$. Une conséquence de cette inégalité est la fonctorialité des applications de Moishezon-Itaka si, de plus, $\kappa(Y|\Delta_Y) \geq 0$: il existe $M_f : M(X|\Delta) \rightarrow M(Y|\Delta_Y)$ telle que $M_Y \circ f = M_f \circ M_X$. Voir le §2.8 pour ces notions.

³³À l’exception des définitions du groupe fondamental, du revêtement universel, de la pseudométrie de Kobayashi, et des points entiers au sens des orbifoldes géométriques.

6.2 Le cas des fibrations de type général.

Le résultat principal est ici le :

Théorème 6.3 *Lorsque $f : (Y|\Delta) \rightarrow S$ est, de plus, une fibration de type général, la conjecture précédente $C_{n,m}^{orb}$ est vraie, et on a alors :*

$$\kappa(Y|\Delta) = \kappa(Y_s|\Delta_s) + \dim(S).$$

Ce théorème est aisément déduit du suivant, adaptation au cadre orbifold de résultats de E. Viehweg, initiés par T. Fujita et Y. Kawamata (Voir [Fuj78], [Kaw80], [Vie83] ; un résultat similaire pour les fibrations telles que $\kappa(XY_x|\Delta_x) = 0$ est dû à Y. Kawamata, dans le contexte “numérique” [Kaw98]) :

Théorème 6.4 [Ca04, 4.13, p. 568] *Soit $f : Y \rightarrow S$ une fibration, avec Y, S lisses, Y dans la classe \mathcal{C} , et S projective. Soit $D = \sum m_j.D_j$ un diviseur entier et effectif sur Y dont le support est à croisements normaux au-dessus du point générique de S . Soit $m > 0$ un entier tel que $m \geq m_j$, pour tout j tel que D_j soit une composante f -horizontale de D (ie : tel que $f(D_j) = S$). Alors : $f_*(mK_{Y/S} + D)$ est un faisceau cohérent faiblement positif³⁴ sur S .*

Remarque 6.5

1. Bien qu’obtenue par les mêmes méthodes que celles de [Vi 83], cette généralisation en étend considérablement le champ d’application.

2. Il résulte de 6.3 que si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration de type général (ie : la base orbifold d’un modèle holomorphe net est de type général), alors les fibres génériques orbifoldes de deux modèles nets holomorphes de f ont la même dimension canonique, égale à la différence entre $\kappa(X|\Delta)$ et $\dim(Y)$. Nous verrons en fait (en 8.17) un résultat plus précis : une telle fibration est presque-holomorphe.

3. Dans le Lemme 4.10, p.567 de [Ca04], l’hypothèse (par exemple) que $g_*(E)$ est localement libre a été omise, comme me l’a signalé O. Debarre. Cette hypothèse est difficilement vérifiable en pratique, mais on a la version suivante, qui couvre les applications présentes :

Proposition 6.6 *Soit $f : Y \rightarrow S$ une fibration avec Y compact, normal et connexe. Soit A un \mathbb{Q} -diviseur ample sur S et D un fibré en droites*

³⁴Voir [Vi83] pour cette notion, due à E. Viehweg. Des rappels se trouvent aussi dans [Ca04, §4]

sur Y tel que $f_*(D)$ soit faiblement positif. Alors $\kappa(Y, D + f^*(A) + E) = \kappa(Y_s, D_s) + \dim(S)$, pour E un diviseur effectif f -exceptionnel adéquat sur Y . S'il existe un morphisme birationnel $v : Y \rightarrow Y'$ contractant tous les diviseurs f -exceptionnels de Y , et un fibré en droites D' sur Y' tel que $D = v^*(D')$, on peut prendre $E = 0$.

Lorsque f est nette (c'est la situation présente, et aussi celle considérée dans [Ca04]), l'hypothèse de la seconde assertion de la proposition est satisfaite (et le lemme 4.10 peut donc bien être appliqué tel quel).

Démonstration : (C'est, sous une forme simplifiée, celle de 4.6 et de 4.3 ci-dessus). Il suffit de montrer que $H^0(Y, m(L + E + f^*(A))) \neq 0$ pour E et $m > 0$ adéquats. Par hypothèse, $H^0(S, S^m(F) \otimes mA) \neq 0$, si $S^m(F)$ est le bidual de $Sym^m(f_*(D))$. Une section non nulle de ce faisceau fournit donc une section de $m(D + f^*(A))$ ayant des pôles sur un diviseur f -exceptionnel de Y (on suppose mA entier). D'où la première assertion. La seconde assertion résulte de ce que, sous l'hypothèse de contractibilité de l'énoncé, toute section de $m(D + f^*(A))$ définie sur le complémentaire du lieu exceptionnel de f se prolonge à Y tout entier \square

6.3 Première application : $\kappa = 0$ et orbifolde Fano.

Notre première application du théorème 6.3 est l'exemple fondamental suivant d'orbifolde géométrique lisse "spéciale" (voir aussi la définition 4.17 pour ce terme) :

Théorème 6.7 *Soit $(Y|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, avec Y compacte et connexe dans la classe \mathcal{C} . Si $\kappa(Y|\Delta) = 0$, alors $(Y|\Delta)$ est "spéciale" (ie : il n'existe pas de fibration de type général $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$).*

Démonstration : Sinon, soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow S$ une fibration de type général. On a donc $\dim(S) > 0$, et (c'est immédiat) : $\kappa(Y_s|\Delta_s) \geq 0$. Donc : $0 = \kappa(Y|\Delta) = \kappa(Y_s|\Delta_s) + \dim(S) \geq \dim(S) > 0$, par 6.3. Contradiction \square

Le même argument fournit un résultat un peu plus général :

Théorème 6.8 *Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow S$ une fibration holomorphe de type général, l'orbifolde géométrique $(Y|\Delta)$ étant lisse avec Y compacte et connexe dans la classe \mathcal{C} .*

Si $\kappa(Y|\Delta) \geq 0$, alors $\dim(S) \leq \kappa(Y|\Delta)$, et on a égalité si et seulement si $\kappa(Y_s|\Delta_s) = 0$ (auquel cas f est la fibration de Moishezon-Iitaka de $(X|\Delta)$)

Corollaire 6.9 *Soit $(X|\Delta)$ lisse et Fano (ie : $-(K_X + \Delta)$ est ample sur X). Alors $(X|\Delta)$ est spéciale.*

Démonstration : Soit H une section lisse de $-m(K_X + \Delta)$ intersectant transversalement Δ . Soit $\Delta' := \Delta + (1/m).H$. Alors : $(X|\Delta')$ est lisse, et $K_X + \Delta'$ est de \mathbb{Q} -torsion, donc $\kappa(X|\Delta') = 0$. Donc $(X|\Delta')$ est spéciale, par 6.7. Donc aussi $(X|\Delta)$, puisque $\Delta \leq \Delta' \square$

Le même argument fournit l'exemple suivant (suggéré par une question de M. Mustața) :

Exemple 6.10 *Soit X une variété torique de fibré anticanonique D , et $\Delta \leq D$. Alors $(X|\Delta)$ est spéciale. En effet : le diviseur anticanonique, complémentaire de l'orbite ouverte, est à croisements normaux.*

Un cas particulier utilisé dans la suite est le suivant :

Exemple 6.11 *Soit $(Y|\Delta) := (\mathbb{P}^r|D_r)$ l'orbifold géométrique (logarithmique) lisse de l'exemple 2.20, obtenue de \mathbb{P}^r en munissant les $(r+1)$ hyperplans de coordonnées de la multiplicité $+\infty$. Cette orbifold géométrique (torique) est donc spéciale.*

6.4 Composées de fibrations de type général

Le résultat suivant est essentiel pour établir les propriétés du “coeur”, au §9 ci-dessous.

Théorème 6.12 *Soient $f : (Z|\Delta_Z) \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ des fibrations, avec $(Z|\Delta_Z)$ lisse, et $Z \in \mathcal{C}$. Soit $g_x : (Z_x|\Delta_{Z_x}) \rightarrow Y_x$ la restriction de g au-dessus de $x \in X$, général. On suppose $f \circ g : (Z|\Delta_Z) \rightarrow X$ de type général. Alors : $\kappa(g|\Delta_Z) = \kappa(g_x|\Delta_{Z_x}) + \dim(X)$.*

En particulier : si $(g_x : (Z_x|\Delta_{Z_x}) \rightarrow Y_x)$ est de type général, alors g est de type général.

Démonstration : Les invariants en jeu sont biméromorphes. On peut donc supposer que g, f , et gf sont nettes et hautes. Les dimensions canoniques de ces trois fibrations sont donc celles de leurs bases orbifoldes, et $\Delta(gf, \Delta_Z) = \Delta(g, \Delta(f, \Delta_Z))$. On pose : $\Delta_Y := \Delta(f|\Delta_Z)$. Le théorème 6.3 montre alors la seconde des égalités suivantes : $\kappa(g|\Delta_Z) = \kappa(Y|\Delta_Y) = \kappa(Y_x|\Delta_{Y_x}) + \dim(X) = \kappa(g_x|\Delta_{Z_x}) + \dim(X) \square$

6.5 Le quotient κ -rationnel (conditionnel)

On suppose dans tout ce §6.5 que $C_{n,m}^{orb}$ est vraie. (Voir 6.1).

Lemme 6.13 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$.*

Soit $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ et $g : (X|\Delta) \dashrightarrow Z$ deux fibrations avec $\dim(Y) > 0$ et $\dim(Z) > 0$, telles que $\kappa(f|\Delta) \geq 0$ et $\kappa(g|\Delta) \geq 0$.

Il existe alors une fibration $h : (X|\Delta) \dashrightarrow V$ telle que $\kappa(h|\Delta) \geq 0$ qui domine f et g (ie : il existe $u : V \dashrightarrow Y$ et $v : V \dashrightarrow Z$ telles que $v \circ h = g$ et $u \circ h = f$).

Démonstration : On peut supposer f et g holomorphes, nettes, avec bases orbifoldes lisses. Soit $W \subset Y \times Z$ l'image du morphisme produit $k : f \times g : X \rightarrow Y \times Z$ défini par $k(x) = (f(x), g(x))$. On note $u' : W \rightarrow Y$ et $v' : W \rightarrow Z$ les projections naturelles, telles que $u' \circ k = f$, et $v' \circ k = g$.

Soit $h : X \rightarrow V$ la factorisation de Stein de $k : X \rightarrow W$. Observons que les projections naturelles $u : V \rightarrow Y$ et $v : V \rightarrow Z$ sont bien des fibrations, puisque $V_y = h(X_y)$ et $V_z = h(X_z)$ sont connexes, pour tous $y, z \in Y, Z$.

On peut encore, quitte à modifier encore X, Y et Z , supposer la fibration $h : (X|\Delta) \rightarrow V$ nette et à base orbifolde lisse, et supposer aussi (par 3.6) que : $\Delta(f, \Delta) = \Delta(u, \Delta(h, \Delta))$.

La famille $g(X_y) = (Z_y)_{y \in Y}$ forme une famille couvrante de sous-variétés de Z . Notons $\Delta_Z := \Delta(g, \Delta)$. L'orbifolde géométrique stable $[(Z|\Delta_Z)_{Z_y}]$ induite par restriction est donc bien définie, et est telle que $\kappa([(Z|\Delta_Z)_{Z_y}]) \geq 0$, puisque $\kappa(g|\Delta) = \kappa(Z|\Delta(g, \Delta)) = \kappa(Z|\Delta_Z) \geq 0$, par hypothèse.

La fibration $v : (V|\Delta(h, \Delta)) \rightarrow Y$ a pour fibre orbifolde générique $(V|\Delta(h, \Delta))_{V_y}$, qui est génériquement finie sur $[(Z/(\Delta_Z)_{V_y})]$. Donc $\kappa((V|\Delta(h, \Delta))_{V_y}) \geq 0$. Par hypothèse $\kappa(Z|\Delta(v, \Delta(h, \Delta))) = \kappa(Z|\Delta(v \circ h, \Delta)) = \kappa(Z|\Delta_Z) \geq 0$.

Appliquant $C_{n,m}^{orb}$ (supposée vraie) à la fibration $v : (V|\Delta_V) \rightarrow Y$, on obtient donc : $\kappa(V|\Delta_V) \geq 0$ \square

Corollaire 6.14 *On suppose que $C_{n,m}^{orb}$ est vraie. (Voir 6.1).*

Soit $(X|\Delta_X)$ une orbifolde géométrique lisse avec $X \in \mathcal{C}$, et $\dim(X) > 0$.

Il existe une unique fibration $r_{X|\Delta}^+ : (X|\Delta) \dashrightarrow R^+(X|\Delta)$ telle que :

1. $\kappa([R^+(X|\Delta)|\Delta(r_{X|\Delta}^+, \Delta)]) \geq 0$.

2. $\kappa_+(X|\Delta)_r = -\infty$, si $[(X|\Delta)_r]$ est la fibre orbifolde stable générique de $r_{X|\Delta}^+$.

Cette fibration, bien définie à équivalence biméromorphe près sur $(X|\Delta)$, est appelée le κ -quotient rationnel (conditionnel) de $(X|\Delta)$.

Démonstration : L'unicité est claire, puisque $\kappa(h|\Delta) = -\infty$, pour toute fibration $h : (X|\Delta) \dashrightarrow T$ telle que $\dim(h(X_r)) > 0$ pour $r \in R^+(X|\Delta)$ générique.

Etablissons l'existence. Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$, on choisit pour $r_{X|\Delta}^+$ l'application constante sur un point. Sinon, on choisit une fibration $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Z$ avec $\dim(Z) > 0$ maximum, telle que $\kappa(f|\Delta) \geq 0$. Le lemme précédent montre que f domine toute fibration $g : (X|\Delta) \dashrightarrow T$ telle que $\kappa(g|\Delta) \geq 0$.

Il reste à montrer que $\kappa_+([(X|\Delta)_z]) = -\infty$, pour $z \in Z$ générique.

Sinon, par récurrence sur $\dim(X) > 0$, toute fibre générale $[(X|\Delta)_z]$ de f admet un (unique) κ -quotient rationnel (conditionnel) $r_z^+ : (X|\Delta)_z \dashrightarrow R_z^+$, holomorphe sur un modèle biméromorphe adéquat de f , et dont la famille des fibres forme donc une composante irréductible de $\mathcal{C}how(X_z)$. Il résulte alors (par des arguments exactement similaires) de la démonstration de 8.21 qu'il existe des fibrations $r^+ : (X|\Delta) \dashrightarrow V$ et $s : V \dashrightarrow Z$ telles que :

1. $s \circ r = f : (X|\Delta) \dashrightarrow Z$.
2. $r_{|X_z}^+ = r_z^+$, pour $z \in Z$ général.

En particulier, à la fois la base orbifold stable et la fibre orbifold stable de $s : (V|\Delta(r^+, \Delta)) \dashrightarrow Z$ ont une dimension canonique positive ou nulle. Il résulte alors de $C_{n,m}^{orb}$ que $\kappa(V|\Delta(r^+, \Delta)) \geq 0$. Ce qui contredit la maximalité de $\dim(Z)$, puisque $\dim(V) > \dim(Z)$, par construction. Les fibres orbifoldes génériques de f ont donc bien $\kappa_+ = -\infty$ \square

Remarque 6.15

1. On a donc : $R^+(X|\Delta) = (X|\Delta)$ si et seulement si $\kappa(X|\Delta) \geq 0$, et dans ce cas, $M(X|\Delta) = (X|\Delta)$ si et seulement si $\kappa(X|\Delta) = \dim(X) \geq 0$.

2. Il peut se faire que $r_{(X|\Delta_X)}^+$ ne soit pas presque-holomorphe lorsque $\Delta \neq 0$. Par exemple si $X = \mathbb{P}^2$, et si Δ est l'orbifold géométrique logarithmique (multiplicités $+\infty$) dont le support consiste en deux droites (projectives, distinctes). Ceci est cependant peut-être particulier aux orbifoldes géométriques logarithmiques.

Ici encore, $r_{(X|\Delta_X)}^+$ jouit de la propriété de fonctorialité suivante :

Lemme 6.16 Soit $f : (X|\Delta_X) \dashrightarrow (Y|\Delta_Y)$ est un morphisme dans la catégorie méromorphe des orbifoldes géométriques lisses. On suppose que $X \in \mathcal{C}$.

Notons (pour simplifier les notations) $[R_X^+|\Delta_{R_X^+}]$ et $[R_Y^+|\Delta_{R_Y^+}]$ les bases orbifoldes stables de $r_{(X|\Delta_X)}^+$ et de $r_{(Y|\Delta_Y)}^+$ respectivement.

Il existe alors un (unique) morphisme $r_f^+ : [R_X^+|\Delta_{R_X^+}] \dashrightarrow [R_Y^+|\Delta_{R_Y^+}]$ tel que $r_f^+ \circ r_{(X|\Delta_X)}^+ = r_{(Y|\Delta_Y)}^+ \circ f$.

Démonstration : Notons F_X la fibre orbifold générique de $r_{(X|\Delta_X)}^+$, R_Y^+ la base orbifold stable de $r_{(Y|\Delta_Y)}^+$, et $r_Y^+ := r_{(Y|\Delta_Y)}^+$. Alors $r_Y^+ : F_X \dashrightarrow R_Y^+$ définit une famille couvrante de R_Y^+ . Il s'agit de montrer que $\dim(F_X) = 0$. Supposons le contraire. L'orbifold géométrique obtenue par restriction de $[\Delta(r_Y^+, \Delta_X)]$ à $r_Y^+(F_X)$ a donc $\kappa = -\infty$, puisque quotient de F_X telle que $\kappa_+(F_X) = -\infty$. Puisque cette famille est couvrante, ceci contredit $\kappa(R_Y^+|\Delta(r_Y^+, \Delta_Y)) \geq 0$ \square

7 ORBIFOLDES SPÉCIALES I

7.1 Fibre et base orbifoldes stables d'une fibration

Rappels. Dans cette section, on considèrera uniquement des orbifolde géométriques $(X|\Delta)$ lisses, avec $X \in \mathcal{C}$, lisse et connexe.

Si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est méromorphe surjective, on définira sa **base orbifold stable**, notée $[Y|\Delta(f, \Delta)]$ ou $[f|\Delta]$, obtenue comme base orbifold d'un représentant holomorphe *net* arbitraire de f . Nous *ne savons pas* si la classe d'équivalence biméromorphe (au sens orbifold) de $[Y|\Delta(f, \Delta)] = [f|\Delta]$ est indépendante du modèle choisi. Mais, par 4.14, sa dimension canonique $\kappa([f|\Delta]) := \kappa(f|\Delta)$ est bien définie. C'est donc sur cet unique invariant que sont basées toutes les considérations qui suivent.

On dit (définition 4.16) que f est de **type général** si sa base orbifold stable est de type général et de dimension strictement positive.

Si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration, on désignera par $(X|\Delta)_y$ sa **fibre orbifold générique stable**, définie, par modification de X , sur un modèle holomorphe de f (également noté f), dont la fibre orbifold générique $(X_y|\Delta_y)$ est lisse (par le théorème de Sard). Voir 2.47. Remarquons que la classe d'équivalence biméromorphe de $(X|\Delta)_y$ générique ne dépend pas du modèle biméromorphe de f choisi, rendant f holomorphe. Mais elle peut dépendre du représentant biméromorphe de $(X|\Delta)$. Voir cependant 8.16 et 8.17 ci-dessous : si f est presque-holomorphe (définition 8.16), alors $(X|\Delta)_y$ ne dépend pas du modèle choisi, et f est presque-holomorphe si elle est de type général ou plus généralement, si $(X|\Delta)$ est finie, et si $\kappa(f|\Delta) \geq 0$. Si f est la fibration de Moishezon-Iitaka, la dimension de Kodaira de $(X|\Delta)_y$ ne dépend pas du modèle biméromorphe de $(X|\Delta)$.

Lorsque f est holomorphe, on n'a pas toujours : $(X|\Delta)_y = (X_y|\Delta_y)$, Δ_y étant la restriction de Δ à X_y . Ce sera cependant le cas pour les fibrations que nous considérerons ici (voir la remarque 2.50).

- Nous montrerons en, 8.13, si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration de type général, et si $g : (X|\Delta) \dashrightarrow T$ est une fibration dont la fibre générique (orbifold stable) $(X|\Delta)_t$ est spéciale, il existe une (unique) factorisation $h : T \dashrightarrow Y$ de f telle que $f = h \circ g$.

Définition 7.1 *L'orbifold géométrique lisse $(X|\Delta)$ est dite **spéciale** si :*

1. $X \in \mathcal{C}$.
2. Aucune fibration $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ n'est de type général.

(En particulier, $X \in \mathcal{C}$ est dite spéciale si $(X|0)$ est spéciale).
 Cette propriété est préservée par équivalence biméromorphe.

7.2 Premiers exemples

Les exemples et contre-exemples les plus simples sont les suivants :

Exemple 7.2

1. Si $(X|\Delta)$ est lisse de type général, de dimension non nulle, alors $(X|\Delta)$ n'est pas spéciale.

2. Si X est une courbe lisse projective de genre g , et si $\Delta = \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot p_j$, avec $m_j > 1, \forall j \in J$, les p_j étant des points distincts de X , alors $(X|\Delta)$ est spéciale si et seulement si $2(g-1) + \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \leq 0$.

C'est le cas si et seulement si $g = 1$ et $\Delta = 0$, ou $g = 0$, et si la suite ordonnée croissante des $m_j, j \in J$ est l'une des suivantes :

$|J| \leq 2$: quelconque.

$|J| = 3$: $(2, 2, m), \forall m \leq +\infty; (2, 3, 4); (2, 3, 5); (2, 3, 6); (2, 4, 4)$.

$|J| = 4$: $(2, 2, 2, 2)$.

3. Si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow (X'|\Delta')$ est méromorphe surjective (ie : telle que f ait un modèle biméromorphe lisse qui est un morphisme orbifold de sujectif), et si $(X|\Delta)$ est spéciale, alors $(X'|\Delta')$ est spéciale, par 8.4.

4. Si $(X|\Delta)$ est une orbifold géométrique lisse, si $X \in \mathcal{C}$, et si $\kappa(X|\Delta) = 0$, alors $(X|\Delta)$ est spéciale. (Ceci résulte du théorème 6.7).

5. Si $(X|\Delta)$ est lisse et Fano, alors $(X|\Delta)$ est spéciale (par le corollaire 6.9). Plus généralement (du moins conjecturalement) :

6. Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$ (voir définition 5.23), et en particulier si $(X|\Delta)$ est RE (voir définition 5.10), alors $(X|\Delta)$ est spéciale. C'est évident, par définition.

7. Si $(X|\Delta)$ est \mathcal{S} -connexe (voir définition en 9.8), alors $(X|\Delta)$ est spéciale (par le corollaire 9.8 du chapitre suivant).

8. Pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{-\infty, 0, 1, \dots, n-1\}$, il existe des orbifolds géométriques spéciales de dimension n avec $\kappa = k$ (Voir [Ca04] pour des exemples simples).

9. Si X est une variété quasi-projective lisse, et \overline{X} une compactification lisse de X telle que $\overline{X} - X := D$ soit un diviseur à croisements normaux de \overline{X} , on dira que X est spéciale si et seulement si $(\overline{X}|D)$ est spéciale. Cette condition ne dépend pas de la compactification choisie.

10. *X est spéciale s'il existe une application méromorphe non-dégénérée $\varphi : \mathbb{C}^n \dashrightarrow X$ (voir [Ca 04], qui traite d'une situation plus générale). De manière similaire, s'il existe un morphisme orbifold $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow (X|\Delta)$, alors $(X|\Delta)$ n'est pas de type général ([Sak 74]. Je remercie E. Rousseau pour m'avoir indiqué cette référence).*

7.3 Composition de fibrations spéciales

Le résultat simple suivant est crucial :

Théorème 7.3 *Soit $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ une fibration méromorphe surjective telle que :*

1. $X \in \mathcal{C}$
 2. *La base orbifold stable $[Y|\Delta(f, \Delta)]$ de f est spéciale.*
 3. *La fibre générale orbifold stable $(X|\Delta)_y$ de f est spéciale.*
- Alors : $(X|\Delta)$ est spéciale.*

Démonstration : On suppose que f est nette, à base orbifold lisse spéciale, et à fibres orbifoldes générales spéciales. Soit $g : (X|\Delta) \dashrightarrow T$ une fibration de type général. Il résulte de 8.13 que $g = h \circ f$ pour une fibration $h : Y \dashrightarrow T$. Quitte à changer de modèles biméromorphes pour f, g, h , on peut supposer par 3.6 que $\Delta_T(g, \Delta) = \Delta_T(h, \Delta_Y(f, \Delta))$ est la base orbifold stable de $h : (Y|\Delta(f, \Delta)) \rightarrow T$. Puisque g est de type général, il en est donc de même pour h . Mais ceci contredit le fait que $[Y|\Delta(f, \Delta)]$ est spéciale. Donc $(X|\Delta)$ est spéciale \square

Remarque 7.4 *Ce résultat est évidemment faux (surfaces elliptiques de base \mathbb{P}^1 ayant au moins 5 fibres multiples, par exemple) sans l'introduction de structures orbifoldes géométriques. Ce résultat simple est l'un de ceux qui justifient la nécessité de travailler dans la catégorie des orbifoldes géométriques, plutôt que dans celle des variétés. Un autre résultat fournissant une conclusion similaire est celui portant sur les groupes fondamentaux des fibrations nettes : le π_1 orbifold de l'espace total est extension de celui de la base orbifold par (un quotient de) celui de la fibre (orbifold).*

Par itération, on obtient, à l'aide de 3.15 :

Corollaire 7.5 *Soit $f_j : (X_j|\Delta_j) \dashrightarrow X_{j+1}, j = 0, \dots, k-1$, une suite de fibrations méromorphes telle que :*

1. $X_0 \in \mathcal{C}$.
 2. X_k est un point.
 3. Pour tout $j = 0, \dots, k-1$, $[(X_{j+1}|\Delta_{j+1})] = [(X_{j+1}|\Delta(f_j, \Delta_j))]$.
 4. Pour tout $j = 0, \dots, k-1$, la fibre **orbifold** stable générique F_j de f_j est telle que : ou bien $\kappa(F_j) = 0$, ou bien $\kappa_+(F_j) = -\infty$.
- Alors : $(X_0|\Delta_0)$ est spéciale.

Nous verrons au §10 que, réciproquement, sous réserve de la validité de la conjecture $C_{n,m}^{orb}$, on peut canoniquement décomposer les orbifoldes géométriques spéciales en tours de fibrations à fibres orbifoldes génériques ayant soit $\kappa = 0$, soit $\kappa_+ = -\infty$.

7.4 Orbifoldes spéciales “divisibles”.

Nous avons considéré dans les sections précédentes la notion d’orbifold spéciale dans la catégorie $Georb^Q$. Lorsque l’orbifold considérée est entière, on peut donner les mêmes définitions, mais dans $Georb^{div}$. On dira alors que $(X|\Delta)$ est *div*-spéciale, ou spéciale^{div} si elle est lisse, $X \in \mathcal{C}$, et n’admet pas de fibration de tpe général dans $Georb^{div}$.

On a l’implication évidente : $(X|\Delta)$ spéciale $\implies (X|\Delta)$ spéciale^{div}, puisqu’une fibration de type général dans $Georb^{div}$ l’est aussi dans $Georb^Q$.

Question 7.6 *Est-il vrai que : $(X|\Delta)$ spéciale^{div} $\implies (X|\Delta)$ spéciale ?*

Cette implication réciproque résulterait d’une réponse affirmative à la question 12.24. (Appliquer le “coeur” (voir 9.1) à $(X|\Delta)$, supposée être spéciale^{div} : la base orbifold est de type général, mais coïncide avec la base orbifold dans $Georb^{div}$ si la réponse à 12.24 est affirmative. Cette base orbifold est donc un point, par hypothèse).

Le dévissage conditionnel de 10.5 reste *a fortiori* valable dans la catégorie $Georb^{div}$ (puisque la sur-additivité des dimensions de Kodaira y est *a fortiori* -valable (puisque les bases orbifoldes divisibles divisent les bases orbifoldes calculées dans $Georb^Q$). Pour établir l’implication réciproque, il suffit donc (sous réserve de $C_{n,m}^{orb}$), de montrer (puisque les orbifoldes avec $\kappa = 0$ sont spéciales et en utilisant 7.3) de montrer qu’une orbifold telle que $\kappa_+^{div} = -\infty$ est spéciale (dans $Georb^Q$). On définit évidemment la condition $\kappa_+^{div} = -\infty$ en imposant à toute base orbifold (calculée dans $Georb^{div}$) de toute fibration d’avoir $\kappa = -\infty$.

8 FIBRATIONS DE TYPE GÉNÉRAL.

Nous établissons ici un certain nombre de propriétés de ces fibrations, utilisées dans la construction du “coeur”, au §9

Notation 8.1 Désormais³⁵, $(Y|\Delta)$ désignera une orbifold géométrique lisse avec Y compacte et connexe.

On dira que $Y \in \mathcal{C}$ si Y , compact, normal et connexe, est biméromorphe à une variété Kählérienne compacte.

On notera $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une application méromorphe surjective.

8.1 Fibrations de type général : composées

Definition 8.2 Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une fibration méromorphe avec X, Y compacts et irréductibles, et $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse. On dit que $(f|\Delta)$ (ou f s’il n’y a pas d’ambiguïté sur Δ) est une **fibration de type général** si $\kappa(f|\Delta) = \dim(Y) > 0$.

Si $(Y|\Delta)$ est une orbifold géométrique lisse, avec Y compacte et connexe. On note $TG(Y|\Delta)$ l’ensemble des classes d’équivalence biméromorphe de fibrations de type général sur $(Y|\Delta)$. Si f est une telle fibration on notera $[f]$ sa classe d’équivalence dans $TG(Y|\Delta)$.

Cet ensemble ne dépend donc que de la classe d’équivalence biméromorphe de $(Y|\Delta)$.

Question 8.3 $TG(Y|\Delta)$ est-il fini si $Y \in \mathcal{C}$?

Proposition 8.4 Soit $g : (Z|\Delta_Z) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ un morphisme surjectif d’orbifoldes géométriques lisses (Y et Z étant compacts et connexes), et $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow X$ holomorphe surjective. Si f est de type général, la composée $f \circ g$ l’est aussi. La propriété subsiste lorsque f et g sont méromorphes.

Démonstration : Si f est de type général, $\kappa(Y, L_f) = p = \dim(X) > 0$. Or $L_{f \circ g} = g^*(L_f)$. Donc $\kappa(Z, L_{f \circ g}) = \kappa(Z, g^*(L_f)) = \kappa(Y, L_f)$. D’où la première assertion. La seconde assertion se démontre de la même manière, puisque la dimension canonique des faisceaux L_f est un invariant biméromorphe des orbifoldes géométriques lisses \square

³⁵C’est-à-dire : dans le présent §8.

Remarque 8.5 *Le théorème 6.12 est une réciproque partielle de cette proposition.*

Rappelons la notion d'orbifold (géométrie lisse) spéciale :

Definition 8.6 *Une orbifold géométrique lisse $(Y|\Delta)$, avec Y compacte et connexe est dite **spéciale** si :*

1. $Y \in \mathcal{C}$ (ie : Y est biméromorphe à une variété Kählérienne compacte).
2. Il n'existe pas de fibration $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ de type général.

Corollaire 8.7 *Si $u : (X|\Delta) \dashrightarrow (X'|\Delta')$ est méromorphe surjective entre orbifoldes géométriques lisses, et si $(X|\Delta)$ est spéciale, alors $(X'|\Delta')$ est aussi spéciale.*

8.2 Faisceaux de Bogomolov

Definition 8.8 *Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, et $L \subset \Omega_X^p$, avec $p > 0$, un sous-faisceau cohérent de rang 1. Rappelons que, d'après 2.26, $\kappa(Y|\Delta, L) \leq p$.*

*On dit que L est un **Faisceau de Bogomolov** si $\kappa(Y|\Delta, L) = p$.*

*Deux tels faisceaux sont **équivalents** s'ils coïncident sur un ouvert non vide de X . On note $Bog(Y|\Delta)$ l'ensemble (éventuellement vide) des classes d'équivalence de tels faisceaux. On note $[L]$ la classe d'équivalence de L .*

Si $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ est une fibration méromorphe, de faisceau $L_f := f^*(K_X)$ au point générique de Y , alors le corollaire 4.3 montre que L_f est un faisceau de Bogomolov si et seulement si f est de type général. D'où une application naturelle (clairement injective) : $F := F_{(Y|\Delta)} : TG(Y|\Delta) \rightarrow Bog(Y|\Delta)$.

Il résulte du corollaire 2.26 que cette application est surjective lorsque Y est biméromorphe à une variété Kählérienne compacte (ie : dans la classe \mathcal{C}). D'où le :

Théorème 8.9 *Si $(Y|\Delta)$ est une orbifold géométrique lisse, avec Y dans la classe \mathcal{C} , l'application $F_{(Y|\Delta)} : TG(Y|\Delta) \rightarrow Bog(Y|\Delta)$ précédente est bijective.*

En particulier, $(Y|\Delta)$ est spéciale si et seulement si $Bog(Y|\Delta)$ est vide.

8.3 Restriction à une sous-variété générique.

On étend au cas des orbifolles géométriques certains des résultats de [Ca 04].

Pour les notions de restriction au sens orbifolde, voir le §2.12, ainsi que 2.48 et 2.50.

Proposition 8.10 *Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une application méromorphe de type général, avec $(Y|\Delta)$ lisse, Y compacte et connexe. Soit $V \subset Y$ une sous-variété non contenue dans le support de Δ , et non contenue dans le lieu d'indétermination de f . Si $f(V) = X$, alors $f_V : (V|\Delta_V) \dashrightarrow X$ est aussi de type général, pour tout choix de la restriction f_V .*

Démonstration : Soit $p := \dim(X) > 0$. Soit $(V'|\Delta_{V'})$ une restriction arbitraire de Δ à V . Voir §2.12 pour cette notion. On obtient $L_{f_V} \subset \Omega_{V'}^p$ en composant l'inclusion $L_f := f^*(K_X) \subset \Omega_Y^p$ avec la restriction naturelle $\Omega_Y^p \rightarrow \Omega_{V'}^p$.

On en déduit l'inégalité : $p := \kappa(f|\Delta) \leq \kappa(f_V|\Delta_V)$, et l'assertion \square

Rappelons la :

Définition 8.11 *Un point $t \in T$ est dit **général** s'il appartient à un sous-ensemble de T contenant une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski non vides. Une fibre Y_t de h est dite générale si $t \in T$ est général.*

Théorème 8.12 *Soit $(Y|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une fibration méromorphe, et $j' : (V'|\Delta_{V'}) \rightarrow (X|\Delta)$ la restriction (au sens de 2.34) de Δ à une sous-variété V de X passant par un point général de X . Si f est de type général, alors $f \circ j' : (V'|\Delta_{V'}) \rightarrow W$ l'est aussi, si $\dim(W) > 0$, avec $W := f(V)$.*

En particulier, $\dim(W) = 0$ si $(V'|\Delta_{V'})$ est spéciale.

Démonstration : On peut, par le théorème 2.38, remplacer $(Y|\Delta)$ par une modification élémentaire $(Y'|\Delta')$, et supposer de plus que :

1. f est nette et haute,
2. la restriction $(V|\Delta_V)$ de Δ à V est bien définie (au sens de 2.12, de sorte que $(V|\Delta_V)$ est lisse),
3. $W := f(V) \subset X$ est lisse (et est donc le membre générique d'une famille couvrante de X).

4. La restriction $g : (V|\Delta_V) \rightarrow W$ de f à V est nette et haute.

5. L'application $\varphi : X \rightarrow Z$ définie par L_f est biméromorphe, et que sa restriction à W est aussi biméromorphe sur son image.

On a alors : $K_{X|W} \leq K_W$. Notons $g : V \rightarrow W$ la restriction de f , et $j : V \rightarrow Y$ l'inclusion. Alors : $\dim(W) = \kappa(V|\Delta_V, j^*(L_f)) \leq \kappa(V|\Delta, L_g) = \kappa(g|\Delta_V) \leq \dim(W)$. Donc $(g|\Delta_V)$ est bien de type général \square

De 8.12 on déduit le :

Corollaire 8.13 *Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une application méromorphe surjective de type général, l'orbifold géométrique $(Y|\Delta)$ étant lisse, Y compacte et connexe.*

Supposons aussi qu'il existe une fibration méromorphe $h : (Y|\Delta) \dashrightarrow T$ telle que les fibres orbifoldes générales de h soient spéciales³⁶. Alors h se factorise par f (ie : il existe $g : T \dashrightarrow X$ telle que $f = g \circ h$).

Démonstration : Sinon, d'après le théorème 8.12 précédent, la restriction de f à $(Y_t|\Delta_{Y_t})$ est de type général, ce qui est impossible, puisque les fibres orbifoldes générales sont supposées spéciales \square

Exemple 8.14 *Soit $(Y|\Delta) := (\mathbb{P}^r|D_r)$ l'orbifold géométrique (logarithmique) lisse de l'exemple 2.20. Alors tous les faisceaux $S_q^N(Y|\Delta)$ sont triviaux. Il n'existe donc pas de fibration de type général $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ sur cette orbifold géométrique, et $TG(Y|\Delta) = 0$ dans ce cas. Cette orbifold géométrique est donc spéciale. Une seconde démonstration de cette propriété est donnée en 6.10.*

À l'aide de l'exemple 8.14, on obtient le résultat suivant, utilisé dans le §8.4 ci-dessous :

Corollaire 8.15 *Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une application méromorphe surjective de type général, l'orbifold géométrique $(Y|\Delta)$ étant lisse, Y compacte et connexe. Supposons aussi qu'il existe une fibration holomorphe $h : Y \rightarrow T$ telle que les fibres génériques $Y_t \cong \mathbb{P}^r$ de h soient des sous-variétés lisses connexes de Y rencontrant transversalement le support de Δ en $s \leq (r+1)$ hyperplans projectifs. Alors la famille des fibres de h se factorise par f .*

³⁶Voir 2.49 pour cette notion.

8.4 Critères de presque-holomorphicité

Définition 8.16 Soit $f : Y \dashrightarrow X$ une application méromorphe propre et surjective (définition par passage au graphe $Y_f \subset X \times Y$ de f) entre espaces analytiques normaux connexes. Soit $I_f \subset Y$ son lieu d'indétermination (lieu au-dessus duquel le graphe de f a des fibres de dimension strictement positive), et $f(I_f) \subset X$ l'image de I_f par f (image par $f' : Y_f \rightarrow X$ de l'image réciproque de I_f dans Y_f).

On dit que f est **presque-holomorphe** si $f(I_f) \subsetneq X$.

L'exemple le plus simple de fibration méromorphe non presque-holomorphe est $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont les droites passant par un point $a \in \mathbb{P}^2$. La famille des fibres de cette fibration (vue dans $\mathcal{C}(\mathbb{P}^2) = \text{Chow}(\mathbb{P}^2)$) se déforme (en fonction de a).

Par contraste, les applications presque-holomorphes jouissent de propriétés similaires à celles des applications holomorphes. Par exemple : si $f : Y \dashrightarrow X$ est une fibration presque-holomorphe, la famille des ses fibres (famille vue dans la variété de Chow $\mathcal{C}(Y)$) forme une composante irréductible de $\mathcal{C}(X)$, par le classique "lemme de rigidité".

En particulier, l'ensemble des fibrations presque-holomorphes (à équivalence biméromorphe près) sur une variété complexe fixée Y (dénombrable à l'infini) est fini ou dénombrable. Remarquer que cette propriété tombe en défaut sur l'exemple non presque-holomorphe très simple donné ci-dessus.

De plus, si f est presque-holomorphe, la restriction $(\Delta_Y)_x$ de l'orbifold géométrique Δ_Y à sa fibre générique Y_x est bien définie, et $(Y_x | (\Delta_Y)_x)$ est lisse si $(Y | \Delta_Y)$ est lisse. La classe d'équivalence biméromorphe de $(Y_x | (\Delta_Y)_x)$ ne dépend que de celle de $(Y | \Delta_Y)$.

Théorème 8.17 Si $(Y | \Delta)$ est une orbifold géométrique lisse, avec Y compacte et connexe, et si $f : (Y | \Delta) \dashrightarrow X$ est une fibration méromorphe de type général, alors f est presque-holomorphe.

Démonstration : Soit $v : Y' \rightarrow Y$ une composée d'éclatements de centres lisses telle que $f' := f \circ v : Y' \rightarrow X$ soit holomorphe. Si f n'est pas presque holomorphe, l'un des diviseurs exceptionnels E de l'un de ces éclatements est tel que :

1. $f'(E) = X$,
2. $v(E) := T$ est de codimension $r + 1 \geq 2$ dans Y .

3. Les fibres génériques E_t de E sur T ont des images X_t dans X de dimension $d > 0$. (Autrement dit : $f'_E : E \rightarrow X$ ne se factorise pas par v).

4. On peut supposer que E n'est pas contenu dans le support de Δ' (ceci par le corollaire 4.15, puisque f , et donc f' sont de type général).

Puisque $(Y|\Delta)$ est lisse, T est contenu dans $s \leq (r+1)$ des composantes (lisses, d'intersections transversales) du support de Δ . Pour $t \in T$ générique, l'orbifold géométrique $(E_t|\Delta_{E_t})$ est donc biméromorphe à $(\mathbb{P}^r|\Delta_r)$, où Δ_r est supportée par s hyperplans projectifs en position générale. Donc $(E_t|\Delta_{E_t})$ est spéciale. Mais d'après 8.10, f_E est de type général, donc d'après 8.12, f_{E_t} aussi. Mais ceci contredit 8.14 \square

Remarque 8.18

1. La condition de lissité de $(Y|\Delta)$ est essentielle. Soit $f : (\mathbb{P}^2|\Delta) \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ la fibration dont les fibres sont les droites passant par un point donné $a \in \mathbb{P}^2$, et soit $\Delta = (1 - \frac{1}{m}).(D_1 + D_2 + D_3)$, les D_j étant 3 droites concourantes en $a \in \mathbb{P}^2$. Cette fibration est de type général si $m \geq 4$ (puisque sa base orbifold géométrique l'est : considérer $u^+(\Delta)$ sur l'éclaté de \mathbb{P}^2 en a). Elle n'est évidemment pas presque-holomorphe.

2. Lorsque $\Delta = 0$, la condition de lissité de Y est également essentielle (Exemple 2.23, p. 534 de [Ca04] du cône Y sur une variété de type général).

La démonstration du théorème 8.17 précédent montre aussi (puisque $(\mathbb{P}^r|(1 - \frac{1}{m}).\Delta_r)$ est uniréglée, pour tout $0 < m < +\infty$) :

Théorème 8.19 *Si $(Y|\Delta)$ est une orbifold géométrique lisse et finie, avec Y compacte et connexe, et si $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ est une fibration méromorphe telle que : $\kappa(f|\Delta) \geq 0$, alors f est presque-holomorphe.*

8.5 Réduction de type général simultanée.

Définition 8.20 *Soit $g : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une fibration de type général, avec $(Y|\Delta)$ lisse, Y compacte et connexe. On dit que g est **maximum** si toute autre fibration de type général $h : (Y|\Delta) \dashrightarrow V$ est dominée par g (ie : telle qu'existe $k : X \dashrightarrow V$ avec $h = k \circ g$).*

Une telle fibration de type général maximum est unique (à équivalence biméromorphe près) si elle existe. L'existence (qui est l'un des résultats principaux du présent texte) sera établie pour les variétés de la classe \mathcal{C} dans

la section 9, à l'aide du théorème d'additivité orbifold pour les dimensions canoniques. On utilisera en particulier le :

Théorème 8.21 *Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow S$ une application holomorphe surjective, avec $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, Y étant compacte connexe et dans la classe \mathcal{C} . On suppose qu'il existe $T \subset S$, un sous-ensemble (arbitraire³⁷) non contenu dans une réunion dénombrable de fermés de Zariski stricts³⁸ de S , tel que pour tout $t \in T$, l'orbifold géométrique (que l'on peut supposer lisse) $(Y_t|\Delta_t) := (Y_t|\Delta_{Y_t})$ admette une fibration de type général $\bar{g}_t : (Y_t|\Delta_t) \dashrightarrow X_t$ maximum.*

Il existe alors une unique fibration $g : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ au-dessus de f (ie : telle qu'existe $h : X \rightarrow S$ avec $f = h \circ g$) telle que pour $x \in U$ général dans S , $g_s : (Y_s|\Delta_s) \dashrightarrow X_s$ soit la fibration de type général maximum de $(Y_s|\Delta_s)$. De plus, pour tout $s = t \in T \cap U$, $g_s = \bar{g}_t$

Démonstration : Le théorème 2.35, p. 538 de [Ca04] montre l'existence d'une fibration $g : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ au-dessus de S telle que $g_t = \bar{g}_t$ pour tout $t \in T' \subset T$, T' n'étant pas analytiquement maigre dans S .

Les arguments de la démonstration de [Ca04, thm 2.35] s'appliquent sans changement à la situation considérée ici, et plus généralement au cas de fibrations presque-holomorphes possédant une propriété d'unicité sur les fibres $(Y_t)_{t \in T}$ de f \square

Le théorème résulte alors de la proposition suivante :

Proposition 8.22 *Soit $f : (Y|\Delta) \rightarrow S$ une application holomorphe surjective, avec $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, Y étant compacte connexe. Soit $f = h \circ g$ une factorisation de f par une application méromorphe $g : Y \dashrightarrow X$ et une fibration $h : X \rightarrow S$.*

On suppose que la restriction $g_t : (Y_t|\Delta_t) \dashrightarrow X_t$ est de type général pour tout $t \in T$, T non analytiquement maigre dans S . Alors, g_s est de type général pour $s \in S$ général.

Démonstration : Pour tout entier $m > 0$, considérons le faisceau analytique cohérent $L := g^*(K_{X/S}) \subset \Omega_{Y/S}^p$, avec $p := \dim(X/S) = \dim(X) - \dim(S)$, et la saturation $\overline{L_m} \subset S_{m,p}((Y|\Delta)/S)$ de $L^{\otimes m}$ dans le

³⁷ie : non nécessairement analytique.

³⁸ie : différents de S . Un tel ensemble T est dit ne pas être *analytiquement maigre* dans S .

faisceau $S_{m,p}((Y|\Delta)/S)$ quotient de $S_{m,p}(Y|\Delta)$ par le sous-faisceau des (polynômes en les) formes nulles sur les p -vecteurs tangents à Y qui sont f -verticaux.

Par le théorème d'image directe de Grauert, les faisceaux $F_m := f_*(\overline{L}_m)$ sont cohérents, et, pour $s \in U$ général dans S , la fibre $F_{m,s}$ de F_m en s coïncide avec $H^0(Y_s, (\overline{L}_{f_s})_m)$ pour tous les $m > 0$. On a noté $L_{g_s} := (g_s)^*(K_{X_s}) \subset \Omega_{Y_s}^p$, et $\overline{L}_{g_s,m} \subset S_{m,p}(Y_s|\Delta_s)$ la saturation de $L_{g_s}^{\otimes m}$ dans $S_{m,p}(Y_s|\Delta_s)$.

L'assertion résulte alors de ce que si, pour un $s \in U$, le système linéaire $|\overline{L}_{g_s,m}|$ définit une application $\varphi_s : Y_s \dashrightarrow Z_s$ de rang p , il en est de même pour tout $s' \in S$ générique, et qu'alors $Z_s = X_s$ (quitte à remplacer m par un multiple adéquat) \square

9 LE “COEUR” D’UNE ORBIFOLDE

9.1 Construction du Coeur.

Le résultat central du présent texte est le :

Théorème 9.1 *Soit $(Y|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, avec Y compacte connexe et dans la classe \mathcal{C} .³⁹ Il existe alors une unique⁴⁰ fibration $c_{(Y|\Delta)} : (Y|\Delta) \dashrightarrow C(Y|\Delta)$ telle que :*

1. $\kappa(c_{(Y|\Delta)}|\Delta) = \dim(C(Y|\Delta))$ (et c est donc presque-holomorphe).
 2. Les fibres générales $(Y_c|\Delta_c)$ de $c_{(Y|\Delta)}$ sont spéciales.
- Cette fibration est presque-holomorphe.*

Definition 9.2 *La fibration $c_{(Y|\Delta)}$ est appelée le **coeur**.*

On notera $[C(Y|\Delta)]$ une base orbifolde stable (voir 4.14) de $c_{(Y|\Delta)}$.⁴¹

*La dimension de $C(X|\Delta)$ est appelée **dimension essentielle** de $(X|\Delta)$, et est notée $\text{ess}(X|\Delta)$.*

*On notera aussi $K(C(Y|\Delta)) := A(Y|\Delta)$ l’algèbre canonique (voir définition en 2.14) de la base orbifolde stable de $c_{(Y|\Delta)}$. On l’appelle l’**algèbre essentielle** de $(Y|\Delta)$.*

Remarque 9.3

1. *La fibration $c_{(Y|\Delta)}$ est donc de type général si $\dim(C(Y|\Delta)) > 0$. Donc $\dim(C(Y|\Delta)) = 0$ si et seulement si $(Y|\Delta)$ est spéciale.*
2. *A l’autre extrême, $(Y|\Delta)$ est de type général si et seulement si $\dim(C(Y|\Delta)) = \dim(Y)$, c’est-à-dire si et seulement si $c_{(Y|\Delta)} = \text{id}_Y$.*
3. *D’après 8.13, le coeur est donc l’unique fibration de type général maximum (au sens de 8.20) sur $(Y|\Delta)$ si $(Y|\Delta)$ n’est pas spéciale.*
4. *Si $C_{n,m}^{\text{orb}}$ est vraie, alors le coeur défini en 9.1 coïncide avec celui défini en 10.2 ci-dessous comme aboutissement de l’itération $(M \circ r)^n$, $n := \dim(X)$ du κ -quotient rationnel r et de la fibration de Moishezon-Iitaka M .*

Démonstration : L’unicité est une conséquence immédiate du théorème 8.13. On montre donc maintenant l’existence. On procède par récurrence sur $n := \dim(Y)$. Si $n = 0$, la conclusion est (évidemment) vraie, en considérant

³⁹ie : biméromorphe à Y' , Kählérienne compacte.

⁴⁰À équivalence biméromorphe près

⁴¹Nous ne savons pas si c’est un invariant de $c_{(Y|\Delta)}$ dans la catégorie biméromorphe des orbifolde géométriques lisses.

les points comme des orbifolles géométriques spéciales. Supposant la conclusion vraie pour $\dim(Y') < n$, on choisit pour $c_{(Y|\Delta)}$ une application constante si $(Y|\Delta)$ est spéciale. Sinon, on choisit une fibration $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow S$ de type général, avec $p := m(X) > 0$ maximum. Il suffit de montrer que les fibres générales (orbifolles) de f sont spéciales : on aura alors $f = c_{(Y|\Delta)}$. Si les fibres orbifolles générales de f ne sont pas spéciales, il existe un sous-ensemble $T \subset S$ qui n'est pas analytiquement maigre dans S , et tel que pour $s \in T$, $(Y_s|\Delta_s)$ n'est pas spéciale, et $c_{(Y_s|\Delta_s)}$ est donc, par l'hypothèse de récurrence, puisque $\dim(S) > 0$, par hypothèse, l'unique fibration de type général maximum sur $(Y_s|\Delta_s)$. On déduit alors de 8.21 et 8.22 l'existence d'une factorisation $f = h \circ g$ de f , avec $g : Y \dashrightarrow X$ et $h : X \dashrightarrow S$ des fibrations, telles que $\dim(X) > \dim(S)$, et telle que, pour $s \in S$ général, la restriction $g_s : (Y_s|\Delta_s) \dashrightarrow X_s$ de g à Y_s soit de type général.

Puisque $f = h \circ g$ est de type général, on déduit du théorème 6.12 que $g : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ est une fibration de type général. Ceci contredit le fait que $\dim(S)$ soit maximum parmi les bases de fibrations de type général définies sur $(Y|\Delta)$, et montre donc que les fibres orbifolles de f sont spéciales \square

Exemple 9.4 Soit $(Y|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse avec Y compacte et connexe dans la classe \mathcal{C} . Si $\kappa(Y|\Delta) \geq 0$, alors $\dim(C(Y|\Delta)) \leq \kappa(Y|\Delta)$, et on a égalité si et seulement si $c_{(Y|\Delta)} = M_{(Y|\Delta)}$ est la fibration de Moishezon-Itaka de l'orbifolde géométrique $(Y|\Delta)$ (autrement dit : si soit $\kappa(Y|\Delta) = 0$, soit si $M_{(Y|\Delta)}$ est de type général. Ceci résulte immédiatement du théorème 6.8.

Proposition 9.5 Soit $(Y|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$. Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow S$ une fibration méromorphe à fibres orbifolles générales spéciales, et $g : (Y|\Delta) \dashrightarrow X$ une fibration méromorphe telle que $\kappa(g|\Delta) = \dim(X)$. On pose $c := c_{(Y|\Delta)}$.

Il existe alors une unique couple de fibrations $\sigma : S \rightarrow C(Y|\Delta)$ et $\gamma : C(Y|\Delta) \rightarrow X$ telles que $c \circ \sigma = f$ et $\gamma \circ c = g$.

$$\begin{array}{ccc} (Y|\Delta) & \xrightarrow{f} & S \\ g \downarrow & \searrow c & \downarrow \sigma \\ X & \xleftarrow{\gamma} & C(Y|\Delta) \end{array}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de 8.13 : pour construire σ (resp. γ), on utilise le fait que c est à base orbifolde stable

de type général (resp. à fibre orbifold générale spéciale) \square

9.2 Fonctorialité.

Proposition 9.6 *Soit $f : (Y|\Delta) \dashrightarrow (X|\Delta')$ une application méromorphe surjective d'orbifoldes géométriques lisses, avec $Y \in \mathcal{C}$. Alors f induit une (unique) application méromorphe d'orbifoldes géométriques lisses $c_f : C(Y|\Delta) \dashrightarrow C(X|\Delta')$ telle que $c_{(X|\Delta')} \circ f = c_f \circ c_{(Y|\Delta)}$.*

De plus, f induit une application méromorphe orbifold $c_f : [C(Y|\Delta)] \rightarrow [C(X|\Delta')]$ entre bases orbifoldes stables.

Démonstration : La composée $c_{(X|\Delta')} \circ f : (Y|\Delta) \dashrightarrow C(X|\Delta')$ est de type général, par la proposition 8.4. Sa restriction à la fibre générale orbifold de $c_{(Y|\Delta)}$ est donc, par le théorème 8.10, soit constante, soit de type général. Comme cette fibre orbifold est spéciale, cette application est constante, et $c_{(X|\Delta')} \circ f$ se factorise donc par $c_{(Y|\Delta)}$. La seconde assertion résulte de 3.6, en considérant des représentants strictement nets et hauts \square

9.3 Connexité par chaînes spéciales.

Proposition 9.7 *Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$, et $c_{(Y|\Delta)} : (Y|\Delta) \dashrightarrow C(Y|\Delta)$ son coeur. Si $(V_t)_{t \in T}$ est une famille couvrante de sous-variétés de Y , et si $(V_t|\Delta_{V_t})$ (définie par restriction de Δ à V_t comme en 2.34) est spéciale pour $t \in T$ général, alors V_t est contenue dans la fibre de $c_{(Y|\Delta)}$, pour tout $t \in T$.*

Démonstration : Sinon, la restriction de $c_{(Y|\Delta)}$ est de type général, par le théorème 8.12, ce qui contredit le fait que $(V_t|\Delta_{V_t})$ est spéciale \square

Corollaire 9.8 *Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, $Y \in \mathcal{C}$ compacte et connexe. Supposons que deux points généraux de Y peuvent être joints par une chaîne connexe de sous-variétés (au sens de 2.34) de Y telles que les orbifoldes géométriques de $(Y|\Delta)$ obtenues par restriction à ces sous-variétés (au sens de 2.34) soient spéciales (On dira alors que $(Y|\Delta)$ est \mathcal{S} -connexe).*

Alors $(Y|\Delta)$ est spéciale. (Autrement dit : $(Y|\Delta)$ est spéciale si elle est lisse et \mathcal{S} -connexe).

Démonstration : Soit y l'un des deux points, choisi tel que la fibre F de $c := c_{(Y|\Delta)}$ passant par y ne passe pas par le lieu d'indétermination de

$c_{(Y|\Delta)}$. Ceci est possible, puisque $c_{(Y|\Delta)}$ est presque-holomorphe, en vertu du théorème 8.4. Soit $V \subset Y$ une sous-variété telle que $(V|\Delta_V)$ soit spéciale et rencontre F sans être contenue dans F (on peut supposer que la restriction de Δ à V est définie, par le théorème 8.12. Alors $c(V) \neq C(Y|\Delta)$, par 8.10. Par récurrence sur $\dim(Y)$, on en déduit (en considérant les variétés de la forme $W := c^{-1}(V)$) que $(Y|\Delta)$ admet une famille couvrante d'orbifolles géométriques $(W|\Delta_W)$ obtenues par restriction de Δ , et contenant strictement les fibres de c . Contradiction avec 9.7 \square

Remarque 9.9 *La lissité de $(Y|\Delta)$ est essentielle (considérer le cône sur une variété de type général). En sens inverse, il existe des Y (avec $\Delta = 0$) spéciales n'ayant aucune famille couvrante non-triviale de sous-variétés spéciales : par exemple, les variétés abéliennes simples.*

Corollaire 9.10 *Si $(Y|\Delta)$ est lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$, et si $(Y|\Delta)$ est rationnellement connexe par chaînes d'orbifolles obtenues par restriction de Δ , alors $(Y|\Delta)$ est spéciale.*

9.4 Invariance par revêtement étale.

Proposition 9.11 *Soit $v : (Y'|\Delta') \rightarrow (Y|\Delta)$ un morphisme d'orbifolles géométriques lisses et connexes dans la classe \mathcal{C} . Si v est étale en codimension 1 (au sens orbifolde, voir 2.23 et 2.24), alors $c_v : C(Y'|\Delta') \rightarrow C(Y|\Delta)$ est génériquement fini. En particulier, $\text{ess}(Y'|\Delta') = \text{ess}(Y|\Delta)$, et $(Y'|\Delta')$ est spéciale si et seulement si $(Y|\Delta)$ l'est.*

Démonstration : On peut supposer que le revêtement v est Galoisien de groupe fini G en codimension 1 (ie : sur le complémentaire de A , Zariski fermé de codimension au moins 2 dans Y). Le groupe G agit naturellement sur $C(Y'|\Delta')$, par unicité du coeur. Soit alors $q : C(Y'|\Delta') \rightarrow C'(Y|\Delta)$ le quotient par G de $C(Y'|\Delta')$. On a donc une application naturelle $c' : Y \dashrightarrow C'(Y|\Delta)$ telle que $c' \circ v = q \circ c_{(Y'|\Delta')}$. Les fibres orbifolles de cette application sont spéciales, puisque images par v de celles de $c_{(Y'|\Delta')}$. De plus, c' est une fibration de type général, par 4.12. Donc $C'(Y|\Delta) = C(Y|\Delta)$ et $c' = c_{(Y|\Delta)}$. D'où le résultat \square

9.5 Le coeur “divisible”.

Si $(X|\Delta)$ est lisse et entière, avec $X \in \mathcal{C}$, on peut définir (avec la même démonstration) le coeur $c^{div} : (X|\Delta) \rightarrow C^*$ de $(X|\Delta)$ dans $Georb^{div}$: ses

fibres générales sont spéciales ^{div} (voir 7.6) et sa base orbifold stable dans $Georb^{div}$ est de type général (ou un point).

Si la question 12.24 a une réponse affirmative, alors $c^{div} = c$.

Puisque l'on ignore la réponse à 12.24, la considération de c^* est essentielle pour l'étude de $\pi_1(X|\Delta)$ qui est (par 11.9) extension du π_1 de la base orbifold divisible B^* de c^* par celui de la fibre orbifold générique F^* de c^* . De plus, l'orbifold lisse F^* étant spéciale, $\pi_1(F)$ est, par la conjecture 12.10, presque abélien.

10 DÉCOMPOSITION DU COEUR.

La conjecture $C_{n,m}^{orb}$ implique que le “cœur” d’une orbifold géométrique lisse $(Y|\Delta)$ de la classe \mathcal{C} n’est autre que la composée des itérés, dans le cadre orbifold géométrique (c’est essentiel), des deux fibrations de base de la classification : la fibration M de Moishezon-Iitaka, et le quotient κ -rationnel r . En bref : $c = (M \circ r)^n, n = \dim(Y)$.

10.1 La décomposition conditionnelle du cœur.

On rappelle les propriétés de M et r .

Lemme 10.1 *On admet l’existence du κ -quotient rationnel⁴² pour les orbifoldes géométriques lisses dans \mathcal{C} .*

Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$.

Soit $r : Y \dashrightarrow R^+ = R^+(Y|\Delta)$ son κ -quotient rationnel, de base orbifold stable $[R^+|\Delta_R^+] := (R^+|\Delta(r, \Delta))$. (Voir le §6.5).

Soit $M : (R^+|\Delta_R^+) \dashrightarrow M(R^+)$ la fibration de Moishezon-Iitaka de $(R^+|\Delta_R^+)$ (qui est bien définie, puisque $\kappa(R^+|\Delta_R^+) \geq 0$).

*On notera $s_{(Y|\Delta)} := M \circ r : (Y|\Delta) \dashrightarrow S(Y|\Delta)$ la composée, appelée **réduction spéciale élémentaire** de $(Y|\Delta)$.*

Alors :

1. *Les fibres orbifoldes stables générales de $s_{(Y|\Delta)}$ sont spéciales.*
2. *$S(Y|\Delta) = (Y|\Delta)$ si et seulement si $(Y|\Delta)$ est de type général (ie : si et seulement si $\kappa(Y|\Delta) = \dim(Y) \geq 0$).*

Démonstration : La première assertion résulte de 7.3, la seconde de la remarque 6.15 précédente \square

Théorème 10.2 (On admet l’existence du κ -quotient rationnel pour les orbifoldes géométriques lisses dans \mathcal{C} , conséquence de $C_{n,m}^{orb}$).

Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$.

On définit une suite de fibrations $s^k : (Y|\Delta) \dashrightarrow S^k(Y|\Delta) := S^k$, de base orbifold stable notée $(S^k|\Delta_{S^k})$, par récurrence sur $k \geq 0$ par les conditions :

1. $s^0 = \text{id}_Y$.
2. $s^{k+1} := s_{(S^k|\Delta_{S^k})} : (S^k|\Delta_{S^k}) \dashrightarrow S^{k+1}$

Alors :

⁴²Conséquence de $C_{n,m}^{orb}$.

1. Il existe un plus petit entier $k \leq n = \dim(Y)$ tel que $S^{k+1} = S^k$.

Cet entier sera appelé **la longueur** de $(Y|\Delta)$, noté $\nu(Y|\Delta)$.

2. Si $k \geq \nu(Y|\Delta)$, $s^k = s^n : (Y|\Delta) \dashrightarrow S^k = S^n$ est l'unique fibration de type général à fibres orbifoldes spéciales définie sur l'orbifold géométrique $(Y|\Delta)$.

La fibration S^n (conditionnelle en $C_{n,m}^{orb}$) est donc le coeur de $(Y|\Delta)$. Elle a été construite inconditionnellement dans le §9.

Démonstration : La première assertion résulte de ce que $\dim(S^{k+1}) < \dim(S^k)$ si $S^{k+1} \neq S^k$, et de ce que $S^{k+j} = S^k$ pour tout $j > 0$ si cette égalité a lieu pour $j = 1$. La seconde assertion résulte du lemme précédent, l'unicité de 7.3 \square

Reformulons le résultat précédent :

Théorème 10.3 (On admet l'existence du κ -quotient rationnel (conditionnel) pour les orbifoldes géométriques lisses dans \mathcal{C}). Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$ et $n = \dim(Y)$. Alors : $c = (M \circ r)^n$, avec les notations précédentes.

Pour les orbifoldes géométriques spéciales, on a donc :

Corollaire 10.4 (On admet l'existence du κ -quotient rationnel (conditionnel) pour les orbifoldes géométriques lisses dans \mathcal{C})

Soit $(Y|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $Y \in \mathcal{C}$, et $n = \dim(Y)$.

Alors $(Y|\Delta)$ est spéciale si et seulement si $\dim(S^n(Y|\Delta)) = 0$.

De manière équivalente : $(Y|\Delta)$ est spéciale si et seulement si $(Y|\Delta)$ est (comme en 7.5) une tour de fibrations à fibres orbifoldes générales stables F ayant soit $\kappa = 0$, soit $\kappa_+ = -\infty$.

Remarque 10.5 La suite de fibrations s^k fournit une décomposition intrinsèque et fonctorielle dans la catégorie biméromorphe des orbifoldes géométriques lisses de \mathcal{C} en composantes des trois “géométries pures” élémentaires :

1. $\kappa_+ = -\infty$ (conjecturalement rationnellement connexes dans un sens orbifold adéquat).

2. $\kappa = 0$.

3. $\kappa = \dim$ (“type général”).

Les analogues “numériques” de ces trois géométries biméromorphes sont :

1. $K < 0$ (“géométrie de Fano”)
2. $K \equiv 0$. (ou $c_1 = 0$).
3. $K > 0$ (fibré canonique ample).

L’objectif du programme des modèles minimaux (en version “logarithmique”) est précisément de réduire la version biméromorphe à la version numérique. Ce “programme” pourrait être (en l’absence de méthodes biméromorphes directes) l’outil permettant de démontrer certaines des conjectures énoncées ci-dessous concernant les orbifolde géométriques.

La “géométrie spéciale” combine donc (conditionnellement, et seulement dans la catégorie orbifolde biméromorphe) les deux premières “géométries pures” ($\kappa_+ = -\infty$ et $\kappa = 0$), tandis que le “coeur” décompose canoniquement et fonctoriellement les orbifolde géométriques dans \mathcal{C} en leurs composantes “spéciale” (les fibres), et de “type général” (la base orbifolde).

10.2 Analogie avec les algèbres de Lie.

Dans le dictionnaire ci-dessous entre notions de géométrie complexe, et notions de la théorie des algèbres de Lie complexes, le “coeur” est l’analogue de la fibration de Levi-Malčev, tandis que la décomposition du coeur $c = (M \circ r)^n$ est l’analogue de la suite des quotients par la série dérivée.

Géométrie orbifolde	Algèbres de Lie
Fibration	Extension
Fibre générale orbifolde	Noyau
Base orbifolde stable	Quotient
Spéciale	Résoluble
Type général	Semi-simple
$\kappa = 0$ ou $\kappa_+ = -\infty$	Abélienne
Coeur	Levi-Malčev

10.3 Variétés de “type” et dimension donnés.

Definition 10.6 Admettons la conjecture $C_{n,m}^{orb}$. Pour toute orbifolde géométrique $(X|\Delta)$ de dimension n , avec $X \in \mathcal{C}$, et $k = 0, 1, \dots, n$, soit $d_k = d_k(X|\Delta) := \dim(S^k(X|\Delta))$, et pour $k = 1, \dots, n$, soit $d'_k := \dim(R(S^{k-1}(X|\Delta)))$.

Les $(2n + 1)$ entiers : $d_0 := \dim(X) \geq d'_1 \geq d_1 \geq d'_2 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \dim((X|\Delta))$ forment une suite décroissante $t(X|\Delta) = (d_0, d'_1, \dots, d_n)$ appelée le **type** de $(X|\Delta)$.

Soit $\nu = \nu(X|\Delta)$ le plus petit entier $k \leq n$ tel que $d_k = d_{k+1} = d_n$ ou $d'_{k-1} = d'_k = d_n$. Cet entier ν est la **longueur** de $(X|\Delta)$.

Le type de $(X|\Delta)$ est soumis aux conditions : $d_k > d'_{k+1}$ si $k < \nu(X|\Delta)$ (puisque la composée de deux fibrations dont les fibres orbifoldes générales ont $\kappa_+ = -\infty$ a aussi cette propriété).

Nous allons voir que ces conditions sont les seules, en général. Il nous suffira pour cela, par récurrence sur ν , d'établir le lemme 10.7 suivant :

Lemme 10.7 Soit $X = (X|0)$ une variété projective lisse de dimension m , de type $t = (m = \delta_0, \delta'_1, \delta_1, \dots, \delta_{\nu-1} = \dots = \delta_m)$ et de longueur $(\nu - 1)$. Alors, pour tout entier $r > 0$:

1. Si $\kappa(X) \geq 0$, $((X \times \mathbb{P}^r)|0)$ est de longueur ν et de type $(d_0 = m + r, d'_1 = m = \delta_0 = \delta_1, d'_j = \delta_{j-1}, d_j = \delta_{j-1}$ pour $j = 1, \dots, m)$.
2. Il existe une variété projective lisse Y telle que $\kappa(Y) = \dim(X) = m$, $\dim(Y) = \dim(X) + r$, et une fibration $J : Y \rightarrow X$ qui est la fibration de Moishezon-Itaka de Y . Le type de Y est alors : $(m + r = d_0 = d_1, d'_j = \delta'_{j-1}, d_j = \delta_{j-1}$ pour $j = 1, \dots, m)$.

Démonstration : L'assertion 1 est évidente, puisque la projection de $Y := (X \times \mathbb{P}^r)$ sur son premier facteur est le quotient rationnel de Y , et coïncide donc avec r pour l'orbifolde géométrique $(Y|0)$.

Pour l'assertion 2, on choisit sur X un fibré très ample H , et pour Y un membre générique du système linéaire $|d.H \times \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}(r + 1)|$, sur $(X \times \mathbb{P}^{r+1})$, pour $d > 0$ entier assez grand. La projection de Y sur X induite par celle du produit sur son premier facteur n'a pas de fibre multiple en codimension 1, et satisfait les conditions énoncées. (Nous ne le vérifions pas ici) \square

Exemple 10.8 Pour tout $n \geq 0$, on note $c(n)$ (tout comme en [Ca 04, 6.22]), le nombre de types en dimension n . Par étude directe on voit ([Ca 04, 6.22]) que $c(0) = 1, c(1) = 3, c(2) = 8, c(3) = 21$.

En dimension 1, les trois types sont : $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ correspondant respectivement à $\kappa = -\infty, 0, 1$ pour les courbes $(X|0)$.

En dimension 2, les 8 types sont : $(2, 0, 0, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 0, 0, 0)$, $(2, 2, 1, 0, 0)$, $(2, 2, 1, 1, 0)$, $(2, 2, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$. Ils correspondent, pour les surfaces $(X|0)$ aux invariants (κ, \tilde{q}) suivants respectivement, où \tilde{q} est le maximum des irrégularités des revêtements étales finis de

$X : (-\infty, 0), (-\infty, 1), (-\infty, +\infty)$ (ie : $q \geq 2$), $\kappa = 0, (\kappa = 1, 0), (\kappa = 1, 1), (\kappa = 1, +\infty), \kappa = 2$.

On trouvera dans [Ca 04, 3.38] une liste partielle des invariants birationnels des variétés $(X|0)$ correspondants aux différents types non-spéciaux possibles en dimension 3.

Plus généralement, on va montrer ([Ca 04, 6.22])⁴³ que : $c(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{\sqrt{5}}$, avec : $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, car $c(n+1) = 3c(n) - c(n-1)$.

En effet : on a $c(n+1) = (n+2) + \sum_0^n (n+1-d_1).c(d_1)$. Le premier terme correspond aux types tels que $d'_1 = d_1 \leq (n+1)$, le deuxième aux types tels que : $(d'_1 > d_1)$. On en déduit : $c(n+1) - c(n) = 1 + \sum_0^n c(d_1)$, puis l'égalité voulue en faisant la différence avec $c(n) - c(n-1)$.

Remarque 10.9 Sous réserve de $C_{n,m}^{orb}$, nous avons donc défini une série de nouveaux invariants biméromorphes des orbifoldes géométriques lisses $(X|\Delta)$. Ces invariants sont donc définis en particulier dans les cas extrêmes $\Delta = 0$ (cas compact) et $\Delta = \text{Supp}(\Delta)$ (cas ouvert, qui s'applique à toute compactification à croisements normaux de toute variété quasi-projective). Nous conjecturons que ces invariants entiers sont stables par déformation (par exemple lorsque $\Delta = 0$).

Ces invariants généralisent et précisent la dimension canonique (dite “de Kodaira”). Ils fournissent, déjà lorsque $\Delta = 0$, (voir, par exemple, le cas de la dimension 2 ci-dessus) une description beaucoup plus précise de la structure de X que la classique dimension “de Kodaira”.

10.4 Fonctorialité (conditionnelle)

Des propriétés de fonctorialité 6.2.4 et 6.16 pour r et M , on déduit immédiatement celles de s (réduction spéciale élémentaire) et du coeur :

Proposition 10.10 Soit $f : (X|\Delta_X) \dashrightarrow (Y|\Delta_Y)$ est un morphisme dans la catégorie méromorphe des orbifoldes géométriques lisses. On suppose que $X \in \mathcal{C}$. Soit $k \geq 0$ un entier. Notons (pour simplifier les notations) $[S_X^k|\Delta_{S_X^k}]$ et $[S_Y^k|\Delta_{S_Y^k}]$ respectivement les bases orbifoldes stables de $s_{(X|\Delta_X)}^k$ et de $s_{(Y|\Delta_Y)}^k$, supposées exister.

Il existe alors un (unique) morphisme $s_f^k : [S_X^k|\Delta_{S_X^k}] \dashrightarrow [S_Y^k|\Delta_{S_Y^k}]$ tel que : $s_f^k \circ s_{(X|\Delta_X)}^k = s_{(Y|\Delta_Y)}^k \circ f$.

⁴³L'expression donnée de $c(n)$ est exacte, bien que la formule de récurrence y soit incorrecte !

On a : $\nu(X|\Delta_X) \geq \nu(Y|\Delta_Y)$.

Si $\nu = \nu(X|\Delta_X)$, s_f^ν induit donc un morphisme orbifold (dans la catégorie biméromorphe) entre les bases orbifoldes des coeurs de $(X|\Delta_X)$ et de $(Y|\Delta_Y)$

Question 10.11 Si $u : (X|\Delta) \rightarrow (X'|\Delta')$ est un morphisme orbifold étale en codimension 1, entre orbifoldes géométriques lisses de \mathcal{C} , les morphismes naturels induits par u (r_u^+, M_u, s_u, s_u^k) sont-ils également (sur des représentants adéquats) étales en codimension 1 ? En particulier, la dimension des orbifoldes géométriques images doit être alors la même. Nous verrons (en 9.11) que cette dernière propriété est vérifiée pour le coeur (voir 9.11), et l'est donc bien, en particulier, pour chaque étape de la décomposition.

10.5 Relèvement de propriétés par dévissage.

Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse spéciale. Admettons la conjecture $C_{n,m}^{orb}$. Soit alors $s^k : (X|\Delta) \dashrightarrow S^k(X|\Delta)$ la suite de fibrations définies ci-dessus, pour $k \leq \nu(X|\Delta)$, avec $s^k = (M \circ r)^k$. Cette suite est appelée le **dévissage canonique** de $(X|\Delta)$.

Soit maintenant (P) une propriété susceptible d'être ou non satisfaite par une orbifold géométrique lisse $(X|\Delta)$, avec $X \in \mathcal{C}$. De manière équivalente, notons (P) la classe des orbifoldes géométriques lisses $(X|\Delta)$, avec $X \in \mathcal{C}$ possédant la propriété (P).

On a alors le lemme de “relèvement” évident suivant, qui permet de relever aux orbifoldes géométriques spéciales des propriétés satisfaites pour les classes $\kappa = 0$ et $\kappa_+ = -\infty$:

Lemme 10.12 Admettons $C_{n,m}^{orb}$.

A. Supposons que la classe (P) possède les propriétés de stabilité suivantes :

1. Invariance biméromorphe.
2. $(X|\Delta) \in (P)$ si $\kappa(X|\Delta) = 0$.
3. $(X|\Delta) \in (P)$ si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$.
4. Stabilité par extension : si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration méromorphe de base orbifold stable $[Y|\Delta(f, \Delta)] \in (P)$, et si $(X|\Delta)_y \in (P)$, pour $y \in Y$ général, alors $(X|\Delta) \in (P)$.

Alors : $(X|\Delta) \in (P)$ si $(X|\Delta)$ est lisse et spéciale.

B. Si, de plus, la classe (P) est telle que :

5. $(X|\Delta) \notin (P)$ si $(X|\Delta)$ est lisse, de type général, avec : $\dim(X) > 0$.
6. Si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration, avec $(X|\Delta) \in (P)$, alors $[Y|\Delta(f, \Delta)] \in (P)$.
Alors : (P) est **exactement** la classe des orbifoldes géométriques spéciales.

(Pour démontrer le point **B**, utiliser le “coeur”, en raisonnant par l’absurde).

Ce lemme devrait permettre de réduire la preuve d’un certain nombre de propriétés conjecturales (voir S.12) des orbifoldes géométriques lisses et spéciales aux cas “élémentaires” cruciaux $\kappa = 0$ et $\kappa_+ = -\infty$. La stabilité par extensions est elle-même conjecturale dans la plupart des situations. Sa signification est la suivante : si les obstructions à étendre (P) s’annulent localement sur la base (orbifold stable) de f , elles s’annulent globalement sur cette base. Des exemples de propriétés auxquelles appliquer ce principe de relèvement sont fournies dans le §12.

11 GROUPE FONDAMENTAL

11.1 Groupe fondamental d’une orbifold géométrique lisse

Les orbifolles géométriques considérées dans cette section sont entières, **lisses** et connexes. Les morphismes orbifolles le sont au sens **divisible** (voir définition 2.3).

On montre ici que le groupe fondamental orbifold se comporte, sous l’hypothèse usuelle de lissité, comme dans le cas des variétés sans structure orbifold (et même mieux, puisque les fibrations induisent toujours des suites exactes, voir 11.9. Ce fait est, avec 7.3, une seconde indication du fait que la catégorie orbifold géométrique puisse être le cadre naturel de la géométrie kählérienne ou algébrique)⁴⁴.

Remarque 11.1 *Remarquons enfin que le groupe fondamental d’une orbifold lisse et entière $(X|\Delta)$, avec $X \in \mathcal{C}$ peut être étudié en considérant son coeur “divisible” c^* (voir le §12.15), qui exprime $\pi_1(X|\Delta)$ comme extension de $\pi_1(B^*)$, la base orbifold de c^* , par $\pi_1(F^*)$, la fibre orbifold générique de c^* . Ce dernier groupe est, conjecturalement (par 12.10), presque abélien, puisque F^* est spéciale^{div}.*

La définition suivante est classique :

Définition 11.2 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec X connexe, et $\Delta := \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$. On note $X^* := (X - \text{supp}(\Delta))$ le complémentaire dans X du support de Δ , et $a \in X^*$. On note $\pi_1(X|\Delta, a)$ le quotient de $\pi_1(X^*, a)$ par le sous-groupe **normal** engendré par les lacets $g_j^{m_j}$, désignant par $g_j, \forall j \in J$ le lacet basé en a , tournant une fois dans le sens direct autour du diviseur D_j (lacet dit “élémentaire” pour D_j). (Dans les problèmes considérés ici, on omettra la mention des points-base, qui n’y jouent aucun rôle).*

On notera enfin X^0 tout ouvert de Zariski de X , complémentaire d’un sous-ensemble analytique fermé A de codimension 2 au moins, A contenant le lieu singulier $\text{Sing}([\Delta])$. On note $\Delta^0 := \Delta \cap X^0$.

⁴⁴Remarquons que les résultats de ce chapitre s’étendent aux champs de Deligne-Mumford lisses dont “l’espace des modules” est projectif (ou dans la classe \mathcal{C}).

Remarque 11.3 Si X est compacte, $\pi_1(X|\Delta)$ est donc de présentation finie, puisque quotient de $\pi_1(X^*)$, qui est de type fini, par le sous-groupe normal engendré par un nombre fini d'éléments.

Exemple 11.4 Si $X = \mathbb{P}^2$, et si $D := \text{Supp}(\Delta)$ est à croisements normaux, et réunion de $r \geq 0$ courbes irréductibles de degrés d_1, \dots, d_r , alors $G^* := \pi_1(\mathbb{P}^2 - D)$ est le quotient de $\mathbb{Z}^{\oplus r}$ par les sous-groupe engendré par (d_1, \dots, d_r) (par [De 79]). Donc toute orbifolde entière $(X|\Delta)$ avec $\text{Supp}(\Delta) = D$ a un π_1 abélien fini, quotient de G^* . La situation est très différente dès que l'on a des points triples : par exemple si D est la réunion de trois droites concourantes. Voir aussi [B-H-H 87, 3.1.D, p.108, et 2.2.F, pp. 65-66].

Proposition 11.5 Soit $f : (X|\Delta_X) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ un morphisme orbifold **divisible**⁴⁵ entre orbifoldes géométriques lisses, avec X connexe.

1. Il induit un morphisme fonctoriel naturel de groupes $f_* : \pi_1(X|\Delta_X) \rightarrow \pi_1(Y|\Delta_Y)$.
2. Si f est une fibration, f_* est surjectif.
3. L'injection $j^0 : (X^0|\Delta^0) \rightarrow (X|\Delta)$ induit un isomorphisme de groupes : $j_*^0 : \pi_1(X^0|\Delta^0) \rightarrow \pi_1(X|\Delta)$
4. Si f est étale en codimension 1, f_* est injectif. L'indice de $\pi_1(X|\Delta_X)$ dans $\pi_1(Y|\Delta_Y)$ est égal au degré géométrique de f .
5. Si f est propre et surjective, son image est d'indice fini (au plus égal au nombre de composantes connexes d'une fibre générique) dans $\pi_1(Y|\Delta_Y)$.

Démonstration : 1. L'image par f du support D_X de Δ_X est contenue dans le support D_Y de Δ_Y . Si D est une composante de Δ_X de multiplicité m , et si E est une composante quelconque de Δ_Y contenant $f(D)$, de multiplicité m' , on a donc, par hypothèse : $t.m = k.m'$, pour un entier $k > 0$. Soit donc g_D un lacet de $X - D_X$ élémentaire pour D . Soit g_E un lacet élémentaire relatif à E dans $(Y - D_Y)$. Puisque $f^*(E) = t.D + \dots$, $f_*(g_D) = (g_E)^t$ (à conjugaison près dans $\pi_1(Y - D_Y)$). Donc $f_*(g_D^m) = (g_E)^{t.m} = (g_E)^{m'.k} = ((g_E)^{m'})^k$, est donc dans le noyau du quotient $\pi_1(Y - D_Y) \rightarrow \pi_1(Y|\Delta_Y)$, puisque ceci est vrai pour toute composante E de D_Y . La fonctorialité de f_* résulte immédiatement de sa définition.

2. Soit $X^{**} := (X - f^{-1}(D_Y)) \cap X^* \subset X^* \subset X$. Si f est une fibration, le morphisme de groupes $\pi_1(X^{**}) \rightarrow \pi_1(Y^*)$ est surjectif. En effet : X , et donc X^{**} est lisse et connexe, les fibres génériques de $f|_{X^{**}} : X^{**} \rightarrow Y^*$

⁴⁵Voir définition en 2.3.

sont connexes, et $f|_{X^{**}} : X^{**} \rightarrow Y^*$ est surjective, par hypothèse. Donc f_* est également surjectif, puisque f_* est déduit du morphisme de groupes précédent par passage aux quotients. Plus précisément, le diagramme commutatif ci-dessous établit la surjectivité de f_* .

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X^{**}) & \longrightarrow & \pi_1(X^*) & \longrightarrow & \pi_1(X|\Delta) \\ \downarrow & & & \nearrow f_* & \\ \pi_1(Y^*) & \longrightarrow & \pi_1(Y|\Delta_Y) & & \end{array}$$

3. Les groupes $\pi_1(X^*)$ et $\pi_1(X^0)^*$ sont naturellement isomorphes par j^0 , et les noyaux des morphismes définissant $\pi_1(X^0|\Delta^0)$ et $\pi_1(X|\Delta)$ sont engendrés par les (classes des) lacets élémentaires correspondants.

4. On est donc réduit, par 3, au cas où f est étale au sens orbifold.

On peut donc supposer être dans la situation de 2.24. Si D est une composante de D_X de multiplicité m , alors $f(D) = E$ est une composante du support de D_Y qui est de multiplicité m' , avec $r.m = m'$, si r est l'indice de ramification de f le long de D , tel donc que $f^*(E) = r.D + \dots$. Donc $f_*(g_D)^m = ((g_E)^r)^{m'}$, avec les notations utilisées dans la preuve de 1. Puisque le morphisme naturel $\pi_1(X^*) \rightarrow \pi_1(Y^*)$ induit par la restriction de f est injectif, et que les sous-groupes normaux de $\pi_1(Y^*)$ engendrés par les lacets élémentaires autour des composantes de D_X et de D_Y coïncident, $\pi_1(X|\Delta_X)$ est bien un sous-groupe de $\pi_1(Y|\Delta_Y)$ dont l'indice coïncide avec celui de $\pi_1(X^*)$ dans $\pi_1(Y^*)$, égal au degré (fini ou pas) de f .

5. Le diagramme utilisé dans la démonstration de l'assertion 2 ci-dessus montre que l'on peut remplacer Y par l'un quelconque de ses ouverts non vides de Zariski Y' , et X par $X' := f^{-1}(Y')$. Soit $f = h \circ s$, $s : X \rightarrow Z$ une fibration, et $h : Z \rightarrow Y$ finie, la factorisation de Stein de f . Quitte à remplacer Y par Y' adéquat, on supposera que $(Z|\Delta(s, \Delta_X))$ est lisse, que $s_\Delta : (X|\Delta_X) \rightarrow (Z|\Delta(s, \Delta_X))$ est un morphisme orbifold (nécessairement divisible), et que $h : Z \rightarrow Y$ est étale et induit un morphisme orbifold divisible $h_\Delta : (Z|\Delta_Z) := (Z|\Delta(s, \Delta_X)) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$. La seule assertion non immédiate est la divisibilité de s_Δ et h_Δ . Puisque f est divisible, Δ_Y divise $\Delta(f, \Delta_X)$. Par finitude de h , $\Delta(f, \Delta_X) = \Delta(h, \Delta(s, \Delta_X)) := \Delta(h, \Delta_Z)$. Ce sont les assertions de divisibilité annoncées. On est donc réduit au cas où $f = s$ est étale finie. L'assertion de divisibilité signifie alors que $h^*(\Delta_Y)$ divise Δ_Z . Donc $\pi_1(Z/h^*(\Delta_Y))$ est un quotient de $\pi_1(Z|\Delta_Z)$. Puisque $\pi_1(Y|\Delta_Y)$ est un quotient de $\pi_1(Z/h^*(\Delta_Y))$ de degré égal au nombre de composantes connexes de la fibre générique de f , le résultat est établi.

Remarque 11.6 1. La condition de divisibilité du morphisme orbifold f est en général nécessaire, pour l'existence de f_* : considérer par exemple $X = \mathbb{P}^1$ avec les trois diviseurs orbifoldes $\Delta_k = \{0\} + (1 - \frac{1}{a_k}).\{\infty\}$, pour $k = 1, 2, 3$ et : $1 < a_1 < a_2 < a_3 = +\infty$, a_1 et a_2 premiers entre eux. Ils induisent deux morphismes de groupes : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{a_1}$ et $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{a_2}$, mais aucun morphisme $\mathbb{Z}_{a_2} \rightarrow \mathbb{Z}_{a_1}$ n'est compatible par composition avec les précédents.

2. Si $f : (X|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta)$ est l'éclatement d'un point lisse du support de Δ_Y , situé sur une composante D de D_Y affectée dans Δ_Y de la multiplicité $m > 1$, et si le diviseur exceptionnel D de f est affecté dans Δ_X tel que $f_*(\Delta_X) = \Delta_Y$ d'une multiplicité m' , première avec m , et assez grande pour que $f : (X|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta)$ soit un morphisme orbifold (non divisible), alors $\pi_1(X|\Delta_X) \cong \pi_1(Y|\Delta'_Y)$, où Δ'_Y est obtenu de Δ_Y par suppression de la composante $(1 - \frac{1}{m}).D$. Ce dernier groupe est en général un quotient strict de $\pi_1(Y|\Delta_Y)$.

En particulier, le groupe fondamental n'est pas un invariant biméromorphe dans la catégorie des orbifolds lisses (munie des morphismes non divisibles).

3. Un cas particulier de $f : (X|\Delta_X) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ auquel l'assertion 2 peut être appliquée est celui dans lequel $X = Y$ et Δ_Y divise Δ_X (ie : $m_{\Delta_Y}(D)$ divise $m_{\Delta_X}(D)$, $\forall D \in W(X) = W(Y)$) : $\pi_1(Y|\Delta_Y)$ est alors un quotient de $\pi_1(X|\Delta_X)$.

Proposition 11.7 $f : (X|\Delta_X) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ un morphisme orbifold **divisible**, avec X connexe. On suppose que f est biméromorphe au sens orbifold (ie : biméromorphe de X sur Y , et tel que $f_*(\Delta_X) = \Delta_Y$). Alors f_* est un isomorphisme de groupes.

En particulier, deux orbifolds géométriques biméromorphes au sens **divisible**⁴⁶ ont des groupes fondamentaux isomorphes.

Démonstration : Par l'observation faite ci-dessus, on ne change pas $\pi_1(Y|\Delta_Y)$ en restreignant Y au complémentaire de $A \subset Y$, Zariski fermé de codimension au moins 2. On choisit A contenant le lieu d'indétermination de f^{-1} . Alors $f' : X^* \rightarrow Y^*$ est un isomorphisme. Et il existe donc un morphisme quotient $h : \pi_1(Y^*) \rightarrow \pi_1(X|\Delta_X)$ tel que $f_* \circ h = \delta_Y : \pi_1(Y^*) \rightarrow \pi_1(Y|\Delta_Y)$ est le quotient naturel. Puisque le noyau de δ (engendré par les

⁴⁶ie : s'il existe une chaîne d'équivalences biméromorphes orbifoldes biméromorphes **divisibles** les reliant.

lacets Δ_Y -élémentaires) est contenu dans celui de h (engendré par les lacets Δ_X -élémentaires), f_* est un isomorphisme \square

Definition 11.8 Soit Δ' et Δ deux diviseurs orbifoldes sur X , connexe. Alors $id_X : (X|\Delta_X) \rightarrow (X|\Delta')$ est un morphisme orbifold **divisible** si et seulement si Δ' **divise** Δ (ie : que pour chaque $D \in W(X)$, $m_{\Delta'}(D)$ divise $m_\Delta(D)$). Ce morphisme induit un morphisme de groupes $(id_X)_* : \pi_1(X|\Delta_X) \rightarrow \pi_1(X|\Delta')$ surjectif.

On dit que $(X|\Delta)$ est **régulière** si le seul diviseur orbifold Δ' divisant Δ , tel que le $(id_X)_*$ soit un isomorphisme est $\Delta' = \Delta$ (autrement dit : si on ne peut pas “réduire” strictement Δ sans réduire strictement son π_1).

11.2 Suite exacte associée à une fibration orbifold nette

Proposition 11.9 $f : (X|\Delta_X) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ un morphisme orbifold **divisible**, avec X connexe. Soit $(X_y|\Delta_y)$ une fibre orbifold lisse générique de f , notant $\Delta := \Delta_X$, et $j : (X_y|\Delta_y) \rightarrow (X|\Delta)$ l'inclusion naturelle. Elle induit une morphisme de groupes naturel $j_* : \pi_1(X_y|\Delta_y) \rightarrow \pi_1(X|\Delta)$.

Si f est nette au sens divisible⁴⁷, la suite de groupes suivante induite par j et f est exacte :

$$\pi_1(X_y|\Delta_y) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X|\Delta) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y|\Delta_Y) \longrightarrow \{1\}$$

Démonstration : Seule l'exactitude en $\pi_1(X|\Delta)$ reste à établir. Puisque $f_* \circ j_* = (f \circ j)_*$, il faut montrer que le noyau de f_* est contenu dans l'image de j_* . Rappelons (voir 3.8) que f “nette” (au sens divisible) signifie qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X|\Delta) & \xrightarrow{w} & (X'|\Delta') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{v} & Y' \end{array}$$

dans lequel :

1. w est un morphisme orbifold divisible, v et w étant biméromorphes, Y, Y' lisses, et $w_*(\Delta) = \Delta'$.
2. Tout diviseur g -exceptionnel de X est w -exceptionnel.

⁴⁷ie : satisfait la condition de 3.8, les morphismes orbifoldes l'étant alors tous au sens divisible.

Si $A \subset Y$ est analytique fermé de codimension 2 ou plus, $f^{-1}(A) = B \cup E \subset X$ est analytique fermé réunion de B , et E' , analytique fermés dans X , B de codimension 2 ou plus, et E un diviseur f -exceptionnel, donc w -exceptionnel, puisque f est nette relativement à f' . Il en résulte que $\pi_1(X''|\Delta'') = \pi_1(X|\Delta)$, si $X'' = f^{-1}(Y - A)$, et $\Delta'' := \Delta \cap X'$.

Remplaçant Y par un ouvert adéquat Y'' et X par $X'' := f^{-1}(Y'')$, on supposera donc désormais que f , ainsi que sa restriction au support de Δ_X sont à fibres équidimensionnelles, le support de Δ_Y étant lisse.

On va maintenant montrer que l'on peut supposer que, de plus, $\Delta = \Delta^{vert}$, partie f -verticale de Δ , ce dernier diviseur orbifold étant simplement la réunion des composantes du support de Δ qui ne sont pas envoyées surjectivement sur Y par f , les multiplicités des composantes (f -verticales) restantes étant conservées.

Alors : $\Delta_Y := \Delta(f, \Delta) = \Delta(f, \Delta^{vert})$. Cette dernière égalité résulte immédiatement des définitions.

On a, de plus, une surjection naturelle $\pi_1(X|\Delta) \rightarrow \pi_1(X|\Delta^{vert})$, compatible avec les restrictions à X_y .

La propriété cruciale pour cette seconde réduction est le fait que le noyau du morphisme naturel $\pi_1(X|\Delta) \rightarrow \pi_1(X|\Delta^{vert})$ est engendré par les lacets élémentaires autour des composantes f -horizontales de Δ , et est donc contenu dans $\pi_1(X_y|\Delta_{X_y}) = \pi_1(X_y)$, puisque $\Delta|_{X_y}^{vert} = 0$.

On supposera donc que f et sa restriction à $\Delta = \Delta^{vert}$ sont équidimensionnels, et que $\Delta_Y = \Delta(f, \Delta)$ est à support lisse.

Soit donc $g \in \pi_1(X^*)$ tel que son image dans $\pi_1(X|\Delta)$ soit dans le noyau de f_* ci-dessus. On peut donc écrire : $f(g) = \prod_r h_r^{\mu_r}$, où les $h_r^{\mu_r}$ sont des lacets élémentaires autour des composantes du support de Δ_Y . Puisque Δ_Y est la base orbifold de $(f|\Delta)$, pour chaque r , on peut écrire, par le théorème de Bezout : $h_r^{\mu_r} = \prod_s f(g_{r,s}^{t_{r,s} \cdot m_{r,s} \cdot q_{r,s}})$, puisque $\mu_r = \text{pgcd}_s(t_{r,s} \cdot m_{r,s})$, par la définition de la base orbifold (divisible). Les $g_{r,s}$ sont des lacets élémentaires autour de composantes de Δ^{vert} dont l'image par f est la composante d'indice r , de multiplicité μ_r , du support de Δ_Y .

Donc : $g = \prod_{r,s} f(g_{r,s}^{p_{r,s} \cdot t_{r,s} \cdot m_{r,s} \cdot q_{r,s}}) \cdot g'$, où $f(g') = 1$ dans $\pi_1(Y^*)$. Mais la suite exacte d'homotopie :

$$\pi_1(X_y) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X^*) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y^*) \longrightarrow \{1\}$$

montre que $g' \in \pi_1(X_y) = \pi_1(X_y|\Delta_{X_y})$. Ce qui achève la démonstration.

Passant à un modèle holomorphe net, on en déduit la version biméromorphe suivante :

Corollaire 11.10 *Soit $(X|\Delta)$ lisse, avec X connexe, et $f : X \dashrightarrow Y$ méromorphe dominante connexe et propre, de fibre orbifolde générique $(X|\Delta)_y$ (sur un modèle biméromorphe rendant f holomorphe), et de base orbifolde stable $[Y|\Delta_Y]$. La suite de groupes suivante est alors exacte :*

$$\pi_1(X_y|\Delta_y) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X|\Delta) \xrightarrow{f_*} \pi_1([Y|\Delta_Y]) \longrightarrow \{1\}$$

Explicitons le lien entre le groupe fondamental de $X \in \mathcal{C}$, lisse et connexe, et celui de la base orbifolde (stable) de sa Γ -réduction.

Corollaire 11.11 *Soit $X \in \mathcal{C}$, lisse et connexe. Soit $\gamma_X : X \rightarrow Y := \Gamma(X)$ sa Γ -réduction (au sens de [ca94], ou sa réduction de Shafarevich), et X_g sa fibre générique (lisse). Soit $(\Gamma(X)|\Delta(\gamma_X)) = [Y|\Delta_Y]$ sa base orbifolde (stable). Alors on a une suite exacte de groupes :*

$$\pi_1(X_g) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\gamma_*} \pi_1([Y|\Delta_Y]) \longrightarrow \{1\}$$

Remarque 11.12 *Cette suite exacte montre que l'étude de $\pi_1(X)$ nécessite celle de l'orbifolde géométrique $(Y|\Delta_Y)$.*

11.3 Revêtement universel d'une orbifolde lisse

Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse avec X connexe. On note $\Delta = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$. On note aussi $X^* := (X - \lceil \Delta \rceil)$, et $X^0 := X - A$, avec $A \supset \text{Sing}(\lceil \Delta \rceil)$ le lieu singulier du support de Δ , si A est de codimension 2 au moins dans X .

Nous adoptons ici la terminologie de [N87], et en rappelons certains résultats.

Définition 11.13 *Un revêtement ramifié en au plus Δ de X est une application holomorphe $g : \bar{X} \rightarrow X$ telle que :*

1. \bar{X} est normal et connexe, et les fibres de g sont discrètes.
2. La restriction $g^* : \bar{X}^* := g^{-1}(X^*) \rightarrow X^*$ de g à \bar{X}^* est un revêtement non ramifié (de groupe $G \subset \pi_1(X^*)$).
3. Si \bar{D}_j^0 est une composante irréductible de $g^{-1}(D_j) \subset \bar{X}^0 := g^{-1}(X^0)$, alors g ramifie à l'ordre n_j , diviseur de m_j le long de \bar{D}_j^0 .
On affecte l'adhérence de \bar{D}_j^0 de la multiplicité $\bar{m}_j := \frac{m_j}{n_j}$. On obtient ainsi un diviseur orbifolde $\bar{\Delta}$ sur \bar{X} dont le support est contenu dans la réunion des $g^{-1}(D_j)$.

4. Tout $a \in X$ a un voisinage ouvert connexe W_a tel que, pour toute composante connexe U_a de $g^{-1}(W)$, $U_a \cap g^{-1}(a)$ soit réduit à un point \bar{a} , et $g|_{U_a} : U_a \rightarrow W$ est propre (et finie).

On dira que \bar{X} est le complété de \bar{X}^* au-dessus du support de Δ .

On dit que g **ramifie en** Δ si $n_j = m_j, \forall j \in J$.

Le morphisme $g : (\bar{X}|\bar{\Delta}) \rightarrow (X|\Delta)$ est alors un **morphisme orbifolde étale**.

La notion d'isomorphisme de revêtements ramifiés est la notion usuelle. Les revêtements ramifiés sont considérés à isomorphisme près dans la suite.

Théorème 11.14 [N87, 1.3.8] Dans la situation précédente⁴⁸, il existe une bijection naturelle entre les sous-groupes de $\pi_1(X^*)$ contenant le sous-groupe normal K engendré par les $g_j^{m_j}, j \in J$, et les revêtements ramifiés en au plus Δ de X (à isomorphisme de revêtement près).

Cette bijection associe au revêtement $g : \bar{X} \rightarrow X$ le sous-groupe de $\pi_1(X^*)$ constitué des automorphismes du revêtement $g^* : \bar{X}^* \rightarrow X^*$ obtenu par restriction de g au-dessus de X^* . Réciproquement, à un sous-groupe, le théorème associe la complétion au-dessus du support de Δ du revêtement de X^* défini par ce sous-groupe.

Corollaire 11.15 Il existe un unique revêtement $u_{X|\Delta} : \overline{(X|\Delta)} := \bar{X} \rightarrow X$ ramifié en au plus Δ , avec \bar{X}^0 (et donc a fortiori \bar{X}) simplement connexe. On l'appelle le **revêtement universel** de $(X|\Delta)$. Alors :

1. Pour tout $j \in J$, soit n_j l'ordre auquel ramifie $u_{X|\Delta}$ le long de \bar{D}_j^0 : c'est un diviseur de m_j . Soit $\bar{\Delta} := \sum_{j \in J} (1 - 1/n_j) \cdot D_j$: ce diviseur orbifolde divise Δ , et on l'appelle **la régularisation** de Δ .

2. L'identité de X induit un morphisme orbifolde (divisible) $id_X : (X|\Delta) \rightarrow (X|\bar{\Delta})$ qui est un isomorphisme au niveau des π_1 . De plus :

3. $u_{X|\Delta} : \bar{X} \rightarrow X$ est aussi le revêtement universel de $(X|\bar{\Delta})$, et $u_{X|\Delta}$ ramifie en $\bar{\Delta}$. On a : $\overline{(\bar{\Delta})} = \bar{\Delta}$. En particulier : $\bar{\Delta} = \Delta$ si et seulement si $(X|\Delta)$ est régulière.

4. Le sous groupe normal de $\pi_1(X^*)$ engendré par les $g_j^{m_j}, j \in J$ est aussi le groupe normal engendré par les $g_j^{n_j}$ (notations de 11.13).

⁴⁸Le résultat de [N87] couvre, plus généralement, les diviseurs orbifoldes à groupes fondamentaux locaux finis. On l'applique ici au-dessus de $X - \Delta_\infty$, si Δ_∞ est la réunion des composantes irréductibles du support de Δ qui sont affectées de la multiplicité $+\infty$.

5. Si $f : (X'|\Delta') \rightarrow (X|\Delta)$ est un morphisme orbifolde divisible biméromorphe, alors le revêtement universel de $(X'|\Delta')$ est déduit de celui de $(X|\Delta)$ par le changement de base $f : X' \rightarrow X$ et normalisation.

Démonstration : Le revêtement universel est donc obtenu en considérant le sous groupe K . L'assertion 1 est évidente, d'après les définitions. L'isomorphisme au niveau des π_1 résulte de ce que les groupes K coïncident pour Δ et sa régularisation. L'assertion 3 est évidente. L'assertion 4 résulte de la définition du groupe K associé à la régularisation de Δ , et de ce qu'il coïncide avec celui associé à Δ . La propriété 5. résulte de ce que les fibres des deux espaces coïncident au-dessus de X^0 , de ce que l'on a un morphisme naturel du changement de base normalisé $X' \times_X \bar{X} \rightarrow \bar{X}'$ vers \bar{X}' au-dessus de X , et de ce que les fibres des deux espaces au-dessus de X sont discrètes \square

Remarque 11.16 1. L'orbifolde $(X|\Delta)$ et sa régularisée ont donc le même π_1 , mais pas nécessairement le même revêtement universel si $(X|\Delta)$ n'est pas finie. Par exemple : si D est un point de \mathbb{P}^1 , alors $(\mathbb{P}^1|D)$ (resp. sa régularisée $(\mathbb{P}^1|0)$) a pour revêtement universel : $(\mathbb{P}^1 - D|0)$ (resp. $(\mathbb{P}^1|0)$).

2. En général, \bar{X} est singulier. Par exemple, si $\Delta := (1 - \frac{1}{m}).(D_1 + D_2)$ est le diviseur orbifolde sur \mathbb{P}^2 , avec D_1, D_2 deux droites projectives distinctes et $2 \leq m < +\infty$ entier, alors $\pi_1(\mathbb{P}^2|\Delta) \cong \mathbb{Z}_m$. De plus, \bar{X} , le revêtement universel orbifolde de $(\mathbb{P}^2|\Delta)$ est le cône sur la courbe rationnelle normale de degré m dans \mathbb{P}^m (c'est la conique plane si $m = 2$). Remarquons que le groupe fondamental local de la singularité du revêtement universel est ici trivial.

Concernant le revêtement universel de $X \in \mathcal{C}$, de 11.11, on déduit :

Proposition 11.17 Soit $X \in \mathcal{C}$, lisse et connexe. Soit $\gamma_X : X \rightarrow Y := \Gamma(X)$ sa Γ -réduction (au sens de [Ca94]), ou réduction de Shafarevich. Soit $(\Gamma(X)|\Delta(\gamma_X)) = [Y|\Delta_Y]$ une base orbifolde stable (au sens divisible. Voir ??), et $u_Y : \bar{Y} \rightarrow Y$ son revêtement universel orbifolde. On suppose que l'on a modifié X et Y de telle sorte que γ soit holomorphe et nette. Donc $(Y|\Delta(\gamma_X)) = [Y|\Delta_Y]$.

D'après 11.11, on a une suite exacte, où $\pi_1(X_y)_X$ désigne l'image dans $\pi_1(X)$ de $\pi_1(X_y)$:

$$\pi_1(X_y)_X \xrightarrow{j_*} \pi_1(X) \xrightarrow{(\gamma_X)_*} \pi_1(Y|\Delta_Y) \longrightarrow \{1\}$$

Soit $u : \bar{X} \rightarrow X$ le revêtement Galoisien de groupe $\pi_1(Y|\Delta_Y)$, quotient de $\pi_1(X)$ par le groupe normal fini $\pi_1(X_y)_X$.

Soit $X' = X \times_Y \bar{Y}$ le produit fibré normalisé. Alors : le morphisme naturel $X' \rightarrow X$ se relève en un morphisme propre et biméromorphe $\beta : X' \rightarrow \bar{X}$.

Démonstration : Soit $Y_0 \subset Y$ l'ouvert au-dessus duquel γ_X est équidimensionnel, et $\Delta(\gamma_X)$ lisse. Soit \bar{Y}_0 son image réciproque dans \bar{Y} . Soit $X_0 := \gamma_X^{-1}(Y_0)$. Puisque γ_X est supposée nette, $\pi_1(X_0) \cong \pi_1(X)$. Il nous suffit de voir que, au-dessus de Y_0 , l'application naturelle $X' \rightarrow X$ est étale. Soit $(Y|\Delta'_Y)$ l'orbifold géométrique régularisée de $(Y|\Delta_Y)$. Donc Δ'_Y divise Δ_Y , et $(Y|\Delta'_Y)$ a le même π_1 et le même revêtement universel que $(Y|\Delta_Y)$. Puisque Δ'_Y divise Δ_Y , un calcul local direct montre alors que la normalisation de $X \times_Y \bar{Y}$ est étale au-dessus de X_0 . (En effet, chaque composante de chaque fibre de γ_X au-dessus de Y_0 a une multiplicité multiple de la multiplicité de Δ'_Y au point image par γ_X de cette fibre) \square

11.4 Groupe fondamental d'une sous-orbifolde.

Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique entière et lisse, X compacte et connexe. Soit $V \subset X$ une sous-variété complexe fermée et irréductible, non-contenue dans le support de Δ . Soit $X^* := X - \text{Supp}(\Delta)$, et $V^* := V - (\text{Supp}(\Delta) \cap V)$. Soit $\nu : \hat{V} \rightarrow V$ la normalisation, et $j : \hat{V} \rightarrow X$ la composée de ν avec l'inclusion de V dans X . On note encore $j^* : \hat{V}^* := \nu^{-1}(V^*) \rightarrow X^*$ la restriction de j . On a donc un morphisme naturel de groupes $\hat{j}_* : \pi_1(\hat{V}^*) \rightarrow \pi_1(X|\Delta)$, composé de $j_*^* : \pi_1(\hat{V}^*) \rightarrow \pi_1(X^*)$ avec la projection $\pi_1(X^*) \rightarrow \pi_1(X|\Delta)$. On notera $\pi_1(V)_{(X|\Delta)} \subset \pi_1(X|\Delta)$ l'image de \hat{j}_* .

Remarque 11.18 *On peut choisir pour X^* tout ouvert de Zariski contenant le complémentaire de $\text{Supp}(\Delta)$ sans changer la définition de $\pi_1(V)_{(X|\Delta)}$.*

Soit $u := u_{(X|\Delta)} : \bar{X} \rightarrow X$ le revêtement universel, et $\bar{V} \subset \bar{X}$ une composante irréductible de $u^{-1}(V)$. Soit $G_{\bar{V}} \subset \pi_1(X|\Delta)$ le sous-groupe stabilisant globalement \bar{V} : ce groupe est défini à conjugaison près dans $\pi_1(X|\Delta)$, et on vérifie aisément qu'il coïncide (à conjugaison près) avec $\pi_1(V)_{(X|\Delta)}$.

On a donc la :

Proposition 11.19 *Si $(X|\Delta)$ est finie, $\pi_1(V)_{(X|\Delta)}$ est un groupe fini si et seulement si toute composante irréductible \bar{V} de $u^{-1}(V)$ est compacte.*

Dans le cas général : $\pi_1(V)_{(X|\Delta)}$ est un groupe fini si et seulement si toute composante irréductible \bar{V} de $u^{-1}(V)$ est u -propre sur $V - \Delta_\infty$, en notant Δ_∞ la réunion des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\Delta)$ affectées de la multiplicité $+\infty$

On notera $j' : (V'|\Delta_{V'}) \rightarrow (X|\Delta)$ une restriction de Δ à V , au sens de 2.34, dans la catégorie Georb^{div} .

Soit $j'_* : \pi_1(V'|\Delta_{V'}) \rightarrow \pi_1(X|\Delta)$ le morphisme naturel, et $\pi_1(V')_{(X|\Delta)} \subset \pi_1(X|\Delta)$ son image. Cette image est définie seulement à conjugaison près dans $\pi_1(X|\Delta)$, et de plus, dépend *a priori* du choix de $(V'|\Delta_{V'})$. Cependant :

Proposition 11.20 $\pi_1(V')_{(X|\Delta)} = \pi_1(V)_{(X|\Delta)}$ (à conjugaison près dans $\pi_1(X|\Delta)$)

Démonstration : On a une application naturelle, commutant avec \hat{j}^* et j'^* , holomorphe propre et à fibres connexes $v : V'^* := j'^{-1}(V^*) \rightarrow \hat{V}^*$. Donc v_* est une surjection au niveau des groupes fondamentaux. Les images dans $\pi_1(X^*)$, et *a fortiori* dans $\pi_1(X|\Delta)$, de $\pi_1(V'^*)$ et $\pi_1(\hat{V}^*)$ coïncident donc \square

Théorème 11.21 Soit $g : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ un morphisme orbifold biméromorphe divisible entre orbifolles lisses, et entières . Soit $V \subset X$ une sous-variété irréductible, et $W \subset Y$ sa transformée stricte par g . On suppose que V (resp. W) n'est pas contenue dans $\text{Supp}(\Delta)$ (resp. $\text{Supp}(\Delta_Y)$). Alors $g_*(\pi_1(W_{(Y|\Delta_Y)})) \cong (\pi_1(V_{(X|\Delta)}))$.

Démonstration : L'assertion résulte du diagramme commutatif suivant, déduit des applications naturelles dans ce contexte :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\hat{W}^*) & \xrightarrow{\hat{j}^*} & \pi_1(Y^*) & \longrightarrow & \pi_1(Y|\Delta_Y) \\ (gw)_* \downarrow & & \downarrow g_* & & \downarrow \cong \\ \pi_1(\hat{V}^*) & \xrightarrow{\hat{j}^*} & \pi_1(X^*) & \longrightarrow & \pi_1(X|\Delta) \end{array}$$

Observer que les flèches verticales sont surjectives. On a (éventuellement) restreint X^* de telle sorte que $g^{-1}(X^*)$ contienne Y^* (cf. remarque 11.18) \square

Exemple 11.22 Soit $R \subset (X|\Delta)$ une courbe rationnelle orbifold. Alors $\pi_1(R)_{(X|\Delta)}$ est un groupe fini. En effet, si R admet une restriction divisible $(R'|\Delta_{R'})$ de Δ qui est une courbe rationnelle orbifold, c'est immédiat,

puisque l'on a un morphisme orbifold $(R'|\Delta_{R'}) \rightarrow (X|\Delta)$ qui induit un morphisme au niveau des groupes fondamentaux, et que le revêtement universel de $(R'|\Delta_{R'})$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^1|\Delta')$, avec Δ' vide ou supportée par un seul point.

De plus, si $g : (Y|\Delta_Y) \rightarrow (X|\Delta)$ est comme dans 11.21, et si $S \subset Y$ est la transformée stricte de R , alors $\pi_1(S)_{(Y|\Delta_Y)}$ est fini. Remarquer que, en général, S n'est pas une courbe rationnelle orbifold, et que si $(S'|\Delta_{S'})$ est une restriction de Δ_Y à S , alors $\pi_1(S'|\Delta_{S'})$ peut-être infini (commensurable à un groupe de surface de genre $g \geq 2$ arbitrairement grand), de sorte que l'argument précédent ne peut être appliqué.

11.5 Γ -réduction (ou réduction de Shafarevich) orbifold.

Nous étendons partiellement au cadre orbifold géométrique certains résultats de [Ca94] : la Γ -réduction de [Ca94] (voir aussi [Ko93] dans le cas projectif).

Théorème 11.23 [Cla08] Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$. Il existe une unique fibration méromorphe presque holomorphe $g : X \dashrightarrow Y$ telle que :

1. Pour $y \in Y$ générique, $\pi_1(X_y)_{(X|\Delta)}$ est fini.
2. Pour $y \in Y$ général, si $V \subset X$ est Zariski-fermé irréductible tel que V rencontre X_y , mais n'est pas contenu dans $\text{Supp}(\Delta)$, et si $\pi_1(V)_{(X|\Delta)}$ est fini, alors $V \subset X_y$.

La fibration g est appelée la **Γ -réduction** (ou réduction de Shafarevich) de $(X|\Delta)$. On la note : $\gamma_{(X|\Delta)} : (X|\Delta) \rightarrow \Gamma(X|\Delta)$. La dimension $\dim(Y)$ de la base de cette réduction est appelée la Γ -dimension de $(X|\Delta)$, notée $\gamma d(X|\Delta)$.

On dit que $(X|\Delta)$ est de **π_1 -type général** si $\dim(Y) = \dim(X)$ ci-dessus.

Démonstration : Elle est analogue à celle de [94]. On construit l'application de manière $\pi_1(X|\Delta)$ -équivariante au niveau de \bar{X} , en considérant le quotient méromorphe de \bar{X} (qui est normal) par la relation d'équivalence engendrée par les familles couvrantes de sous-espaces analytiques compacts de \bar{X} . Le seul point nouveau est la nécessité, pour évaluer le volume des cycles analytiques compacts de \bar{X} , de construire une forme de Kähler équivariante sur \bar{X} , relevée d'une forme de Kähler orbifold (à pôles adéquats) sur $(X|\Delta)$.

Voir [Cla08] pour les détails. On obtient alors $\gamma_{(X|\Delta)}$ par passage au quotient par $\pi_1(X|\Delta)$ \square

Remarque 11.24 *Lorsque l'orbifolde $(X|\Delta)$ ci-dessus n'est plus finie (par exemple : “logarithmique”), la conclusion précédente tombe en défaut : l'application $\gamma_{(X|\Delta)}$ n'est pas presque-holomorphe en général, et ses fibres ne sont pas toujours les images des cycles compacts maximaux “généraux” de \bar{X} . Ces phénomènes sont illustrés par l'exemple déjà considéré de $(\mathbb{P}^2|D)$, D étant le diviseur réduit constitué de deux droites distinctes d'intersection $a \in \mathbb{P}^2$. Dans ce cas, on a bien une (unique) application $\gamma : (\mathbb{P}^2|D) \rightarrow \mathbb{P}^1$ jouissant des propriétés ci-dessus, dont les fibres sont les droites passant par a . Ce phénomène est évidemment dû au fait que cette orbifolde a , au point a , une singularité log-canonique mais non klt. On peut très certainement construire aussi (un peu différemment) une Γ -réduction pour les orbifolde lisses et entières non-finies si $X \in \mathcal{C}$ en considérant les familles couvrantes de cycles V de X dont les composantes irréductibles de l'image inverse dans \bar{X} sont propres sur $(V - (\text{Supp}(\Delta) \cap V))$ (voir proposition 11.19).*

Corollaire 11.25 *Soit $(X|\Delta)^{\text{div}}$ une orbifolde géométrique lisse rationnellement engendrée (ie : RE^{div}). Alors $\pi_1(X|\Delta)$ est fini.*

Démonstration : Puisque $(X|\Delta)$ est une tour de fibrations méromorphes⁴⁹ à fibres orbifoldes RCC, il suffit, par 5.73 et 5.72, de montrer le résultat lorsque $(X|\Delta)$ est RCC. Puisque deux points génériques de X sont alors joints par une chaîne connexe de courbes orbifoldes dont les groupes fondamentaux sont finis, l'assertion résulte de 11.23 de l'exemple 11.22, et du crucial 11.21⁵⁰ (qui nous dispense de savoir que la connexité rationnelle est préservée par équivalence biméromorphe orbifolde) \square

Rappelons ([Ca98]) :

Définition 11.26 *Une classe \mathcal{G} de groupes est dite **stable** si :*

1. *Tout groupe isomorphe à $G \in \mathcal{G}$ est dans \mathcal{G} .*
2. *Tout quotient, tout sous-groupe d'indice fini de $G \in \mathcal{G}$ est dans \mathcal{G} .*
3. *Tout extension de deux groupes de \mathcal{G} est dans \mathcal{G} .*

⁴⁹Les bases orbifoldes sont donc considérées ici dans $\text{Georb}^{\text{div}}$.

⁵⁰On pourrait invoquer aussi 2.41.

Les exemples les plus simples sont les classes des groupes finis, virtuellement (ou presque) abéliens, virtuellement polycycliques, virtuellement résolubles. La classe des groupes virtuellement nilpotents n'est pas stable.

Corollaire 11.27 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold de géométrie lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Soit \mathcal{G} une classe stable de groupes. Si deux points génériques de X peuvent être joints par une chaîne connexe de sous-variétés (analytiques fermées irréductibles) $V \subset X$, non contenues dans $\text{Supp}(\Delta)$, et telles que $\pi_1(V)_{(X|\Delta)} \in \mathcal{G}$, alors $\pi_1(X|\Delta) \in \mathcal{G}$.*

Démonstration : Lorsque \mathcal{G} est la classe des groupes finis, c'est une conséquence immédiate de 11.23. En général, on considère le sous-ensemble $A \in \mathcal{C}(X)$ constitué des a tels que $\pi_1(Z_a|\Delta_{Z_a})_{(X|\Delta)} \in \mathcal{G}$. Il s'agit de montrer que cet ensemble est \mathbb{Z} -régulier et stable. Les arguments sont les mêmes que ceux de la démonstration de 11.23⁵¹, et sont exposés dans [Ca98] et [Ca04] auxquels nous renvoyons \square

Remarque 11.28 *Un résultat similaire est certainement vrai aussi lorsque $(X|\Delta)$ n'est pas finie. L'énoncé et la démonstration nécessitent cependant des modifications.*

11.6 Finitude résiduelle et critère d'abélianité.

De 11.15 on déduit :

Corollaire 11.29 *1. Il existe un revêtement ramifié (Galoisien) fini $g : \bar{X} \rightarrow X$ qui ramifie en Δ (exactement) si et seulement s'il existe un sous-groupe (normal) G' d'indice fini G de $\pi_1(X|\Delta)$ ne contenant, pour chaque $j \in J$, aucun des éléments g_j^k , pour $0 < k < m_j$. Cette condition est satisfaite, en particulier, si $\pi_1(X|\Delta)$ est résiduellement fini.*

2. S'il existe un revêtement ramifié (Galoisien) fini $g : \bar{X} \rightarrow X$ qui ramifie en Δ (exactement), alors la complétion au-dessus de $A \subset X$ du revêtement universel (au sens usuel) de \bar{X}^0 est le revêtement universel de $(X|\Delta)$.

Démonstration : 1. Soit $G' < G$ un tel groupe, et $G'^* < \pi_1(X^*)$ son image réciproque. Elle définit un revêtement étale fini X'^* de X^* . Le groupe

⁵¹Il suffit, dans la première (resp. dernière) ligne, de remplacer : “ $\pi_1(V)_{(X|\Delta)}$ fini” par : “ $\pi_1(V)_{(X|\Delta)} \in \mathcal{G}$ ” (resp. “ N, Q finis” par : “ $N, Q \in \mathcal{G}$ ”)

G'^* contient K , et définit donc un revêtement ramifiant en au plus Δ . Il ramifie en Δ exactement, puisque, par hypothèse, les lacets g^{n_j} ne sont pas dans G' si n_j est un diviseur strict de m_j .

Si $\pi_1(X|\Delta)$ est résiduellement fini, un tel sous-groupe existe (par définition).

2. Le revêtement universel de \bar{X}_0 satisfait alors les conditions de 11.15 caractérisant le revêtement universel de l'orbifolde géométrique $(X|\Delta)$ \square

Remarque 11.30 1. Dans la situation de 11.29, si $\sigma : \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ est une résolution des singularités (quotient) de \bar{X} , comme ci-dessus, alors l'inclusion de $\bar{X}^0 \subset \tilde{X}$ induit un morphisme $j_* : \pi_1(\bar{X}^0) \rightarrow \pi_1(\tilde{X})$ surjectif, mais de noyau infini, en général, comme le montre l'exemple (classique) suivant : E une courbe elliptique, (-1) l'involution usuelle sur E , $(X|\Delta) = ((\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1)|\Delta)$ le quotient de $E \times E$ par le sous-groupe à quatre éléments engendré par les deux involution agissant sur chacun des facteurs. On choisit pour \tilde{X} la surface de Kummer quotient de $E \times E$ par l'action diagonale des involutions. Néanmoins, lorsque les groupes fondamentaux locaux des singularités de \bar{X} sont triviaux, ce morphisme j_* est bijectif. Nous exploiterons ce fait dans 11.31 ci-dessous.

Théorème 11.31 Soit $(X|\Delta)$ lisse, avec X complexe, compacte et connexe. Si $\pi_1(X|\Delta)$ est résiduellement fini, il existe un revêtement fini Galoisien ramifié en Δ (exactement) $g : \tilde{X} \rightarrow (X|\Delta)$ tel que $\pi_1(\tilde{X}^0) \rightarrow \pi_1(\tilde{X})$ soit bijectif, et $\pi_1(\tilde{X})$ est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(X|\Delta)$, si $\sigma : \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ est une résolution des singularités (quotient) de \bar{X} .

Démonstration : On peut naturellement stratifier $Supp(\Delta)$ comme réunion disjointe d'un nombre fini de sous-variétés lisses V_j , localement fermées. A chacune des V_j est attaché un sous-groupe fini abélien G_j de $\pi_1(X|\Delta)$, bien défini à conjugaison près seulement, et égal au groupe fondamental local de $(X|\Delta)$ en un point quelconque de V_j . Le groupe $\pi_1(X|\Delta)$ étant supposé résiduellement fini, il admet un sous-groupe normal d'indice fini qui ne rencontre qu'en $\{1\}$ chacun des G_j . Le revêtement associé à un tel sous-groupe satisfait les conditions énoncées, puisque les groupes fondamentaux locaux deviennent tous triviaux sur un tel revêtement, donc $\pi_1(\tilde{X}_0) = \pi_1(\tilde{X})$ \square

Théorème 11.32 Soit $(X|\Delta)$ lisse, entière, finie, et Fano, avec X projective. Si $\pi_1(X|\Delta)$ est résiduellement fini, alors il est fini ⁵²

⁵²On conjecture en 12.10 que l'hypothèse de finitude résiduelle est superflue.

Démonstration : Soit $\bar{\Delta}$ la régularisation de Δ au sens de 11.15. Il existe donc un revêtement orbifold étale fini $g : X' \rightarrow (X|\bar{\Delta})$, puisque $\pi_1(X|\Delta) = \pi_1(X|\bar{\Delta})$ est résiduellement fini. Puisque $\bar{\Delta}$ divise Δ , et que la paire $(X|\Delta)$ est klt, la paire $(X'|0)$ est aussi klt (en fait, X' n'a que des singularités quotient). De plus, X' est "faiblement Fano", puisque $K'_X = g^*(K_X + \Delta') = g^*(K_X + \Delta) - g^*(\Delta'')$, avec $\Delta'' := \Delta - \bar{\Delta}$. Donc $-(K_X + \bar{\Delta}) = -(K_X + \Delta) + \Delta''$ est somme d'un \mathbb{Q} -ample, et d'un Δ'' tel que la paire $(X|\Delta'')$ soit aussi klt. Le résultat de [Tak00] s'applique donc, et montre que X' est simplement connexe. Mais le revêtement universel de X' (égal à X' , donc) est aussi celui de $(X|\Delta)$ et de $(X|\bar{\Delta})$. Donc $\pi_1(X|\Delta)$ est fini \square

Remarque 11.33 *Le résultat précédent peut être affiné au cas d'orbifolides Fano klt. Il semble que la théorie L^2 puisse être adaptée au cas orbifold pour éliminer l'hypothèse de finitude résiduelle*

On a enfin l'extension suivante au cadre orbifold géométrique de [Delz06] sur les quotients résolubles des groupes de Kähler⁵³ :

Théorème 11.34 [Ca09] *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$, connexe. Alors :*

1. $\pi_1(X|\Delta)$ a un groupe quotient résoluble, mais non virtuellement nilpotent, si et seulement si l'un des revêtements orbifold étales finis de $(X|\Delta)$ admet une fibration sur une courbe de genre $g \geq 2$.
2. Si $\pi_1(X|\Delta)$ est résoluble, alors $\pi_1(X|\Delta)$ est presque nilpotent.
3. Si $(X|\Delta)$ est spéciale, tout quotient résoluble de $\pi_1(X|\Delta)$ est presque abélien; si $\pi_1(X|\Delta)$ est linéaire (ie : plongeable dans un $Gl(N, \mathbb{C})$), alors $\pi_1(X|\Delta)$ est presque abélien.

Théorème 11.35⁵⁴ *Soit $X \in \mathcal{C}$ telle que, pour tout revêtement fini étale X' de X , l'application d'Albanese de X' soit surjective. Alors tout groupe quotient G de $\pi_1(X)$ qui est résoluble est presque abélien.*

En particulier, si X est spéciale, tout quotient résoluble de $\pi_1(X)$ est presque abélien.

Démonstration : Il résulte de [Delz06] que G est presque nilpotent (sinon un revêtement étale fini de X fibre sur une courbe de genre 2 ou plus, contredisant l'hypothèse sur l'application d'Albanese). Il résulte alors de [Ca95] que G est presque abélien \square

⁵³Si $\pi_1(X|\Delta)$ est résiduellement fini, on peut déduire directement 11.34.2-3 de [De06].

⁵⁴Cet énoncé est inspiré par une discussion avec K. Yamanoi.

12 CONJECTURES

Les conjectures qui suivent sont motivées par le lemme de dévissage 10.12 dans le cas des orbifolds géométriques spéciales, et par des conjectures standard dans le cas des variétés (lisses) avec $\kappa = 0$ ou $\kappa_+ = -\infty$ (conjecturalement rationnellement connexes). D'autres sont des versions orbifoldes de celles de S. Lang (voir [La86]) concernant l'arithmétique et l'hyperbolicité des variétés de type général. Ces conjectures orbifoldes semblent être des intermédiaires incontournables pour atteindre les propriétés conjecturales des variétés spéciales (sans structure orbifold), puis des variétés arbitraires, à l'aide du "cœur".

Nous ne cherchons pas à établir une liste (pourtant limitée) des cas connus.

12.1 Stabilité par déformation et spécialisation

Definition 12.1 Soit $0 \in S$ un espace analytique connexe pointé, et $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. Une **déformation** de $(X|\Delta)$ paramétrée par S est une orbifold géométrique lisse $(\mathcal{X}|\mathcal{D})$ munie d'une submersion surjective propre et connexe $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ dont toutes les fibres sont dans \mathcal{C} , et telle que :

1. Si $\mathcal{D} = \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot \mathcal{D}_j$, alors chacune des \mathcal{D}_j est lisse, et la restriction de f à \mathcal{D}_j est submersive.
2. $(\mathcal{X}_0/\mathcal{D}_0) = (X|\Delta)$, posant : $\Delta_s := \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot (\mathcal{D}_j)_s, \forall s \in S$.

Remarque 12.2 Nous imposons à chacune des \mathcal{D}_j d'être submersive sur S , et non seulement lisse, à cause de l'exemple suivant : $(X_s|\Delta_s) = (\mathbb{P}^2|C_s)$, où C_s est une conique réduite (affectée de la multiplicité $+\infty$), C_s étant lisse si $s \neq 0$, et réunion de deux droites distinctes si $s = 0$. Dans ce cas, le quotient κ -rationnel de $(\mathbb{P}^2|C_s)$ est un point si $s \neq 0$, et \mathbb{P}^1 si $s = 0$. Les conjectures 12.4.(2+4) ci-dessous ne seraient donc pas satisfaites.

Conjecture 12.3 La dimension essentielle de $(X|\Delta)$ est invariante par déformation (ie : $\forall s \in S, \text{ess}(X_s|\Delta_s) = \text{ess}(X_0|\Delta_0)$ dans la situation précédente). En particulier, si $(X_0|\Delta_0)$ est spéciale, $\forall s \in S, (X_s|\Delta_s)$ est spéciale.

Plus précisément : il existe une fibration méromorphe (unique) $c : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ au-dessus de S qui induit, pour tout $s \in S$, une fibration méromorphe

$c_s : X_s \rightarrow C_s$ qui est le coeur de $(X_s|\Delta_s)$. Sur un modèle biméromorphe adéquat, la base orbifold stable de $(C/\mathcal{D}(c, \Delta))$ est une déformation de celle de $(X_0|\Delta_0)$.

L'algèbre essentielle $A(X|\Delta)$ est aussi un invariant de déformation. Elle est de type fini. (Voir 9.1 et 2.14 pour sa définition).

Les deux dernières conjectures sont analogues à l'invariance par déformation de l'algèbre canonique, et à la finitude de ses générateurs ([Siu01], [Pa05], [BCHM06]).

Nous allons maintenant voir que ces conjectures peuvent être réduites, dans une certaine mesure, par le dévissage de §.10.5, au cas de l'invariance par déformation des plurigenres en version orbifold, et au cas $\kappa_+ = -\infty$. Ce dévissage suggérant l'invariance par déformation de nouveaux invariants intermédiaires définissant le type (voir définition 10.6), et en particulier de la longueur $\nu(X|\Delta)$. Le lemme 10.12 montre en effet immédiatement que les conjectures 12.3 résultent des suivantes (et de $C_{n,m}^{orb}$, ou de sa conséquence : l'existence du κ -quotient rationnel) :

Conjecture 12.4 1. $\kappa(X|\Delta)$ est invariante par déformation (ie : $\forall s \in S$, $\kappa(X_s|\Delta_s) = \kappa(X_0|\Delta_0)$ dans la situation précédente). L'algèbre canonique $K(X|\Delta)$ est de type fini, et invariante par déformation. (Voir 2.14 pour la définition).

2. La dimension du κ -quotient rationnel $r_{(X|\Delta)}^+$ de $(X|\Delta)$ est un invariant de déformation.

3. Si $\kappa(X|\Delta) \geq 0$, il existe une fibration méromorphe (unique) $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ au-dessus de S qui induit, pour tout $s \in S$, une fibration méromorphe $\mu_s : X_s \rightarrow M_s$ qui est la fibration de Moishezon-Iitaka de $(X_s|\Delta_s)$. Sur un modèle biméromorphe adéquat, la base orbifold stable de $(\mathcal{M}/\mathcal{D}(\mu, \Delta))$ est une déformation de celle de $(X_0|\Delta_0)$.

4. il existe une fibration méromorphe (unique) $r : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$ au-dessus de S qui induit, pour tout $s \in S$, une fibration méromorphe $r_s^+ : X_s \rightarrow R_s^+$ qui est le κ -quotient rationnel de $(X_s|\Delta_s)$. Sur un modèle biméromorphe adéquat, la base orbifold stable de $(\mathcal{R}/\mathcal{D}(r, \Delta))$ est une déformation de celle de $(X_0|\Delta_0)$.

Remarque 12.5 Les résultats de [Cla06] et de [BCHM06] établissent respectivement la stabilité par déformation de $K(X|\Delta)$ et le fait qu'il soit de type fini (du moins lorsque $\Delta = 0$). La conjecture 5.26 implique facilement l'invariance par déformation du κ -quotient rationnel.

Exemple 12.6 (*Suggéré par une remarque de Y. Tschinkel*). Soit X'_0 le cône sur une hypersurface lisse de degré $(n+2)$ (donc de type général) de \mathbb{P}_n , $n \geq 2$. Il est spécialisation d'une famille d'hypersurfaces lisses de degré $(n+2)$ (donc spéciales) de \mathbb{P}_{n+1} . Soit X_0 le transformé total de X'_0 dans l'éclaté de \mathbb{P}_{n+1} en le sommet de X'_0 . Donc X_0 a deux composantes : l'éclaté de X'_0 en son sommet, qui n'est pas spécial, et une seconde composante isomorphe à \mathbb{P}_n . Et X_0 est encore spécialisation de la famille précédente de variétés spéciales. Observons que X_0 est \mathcal{S} -connexe (avec la définition 12.7 ci-dessous), bien que l'une de ses composantes ne le soit pas.

Définition 12.7 Une orbifold géométrique $(X|\Delta)$ est dite \mathcal{S} -connexe si $X \in \mathcal{C}$ est de dimension pure, si ses composantes irréductibles sont lisses et se coupent transversalement, si chaque composante $(X_k|\Delta_k)$ de $(X|\Delta)$ est lisse, et si deux points génériques de X peuvent être joints par une chaîne connexe de sous-orbifolds géométriques spéciales.

Conjecture 12.8 Toute spécialisation d'orbifolds géométriques lisses spéciales est \mathcal{S} -connexe.

Cette conjecture ne semble pas pouvoir être simplement déduite par dévissage des cas $\kappa = 0$ et $\kappa_+ = -\infty$.

Dans une autre direction :

Conjecture 12.9 $\gamma d(X|\Delta)$ est invariante par déformation.

Le cas des familles projectives de variétés de dimension 3 (sans structure orbifold géométrique) a été partiellement résolu par B. Claudon [Cla07].

12.2 Groupe fondamental et revêtement universel

Conjecture 12.10 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse entière, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe.

1. Si $(X|\Delta)$ est spéciale, alors $\pi_1(X|\Delta)$ est presque abélien (noté : $\pi_1(X|\Delta) \in \widetilde{Ab}$, ceci signifie que ce groupe a un sous-groupe d'indice fini abélien). En particulier :

2. Si $\kappa(X|\Delta) = 0$, alors $\pi_1(X|\Delta) \in \widetilde{Ab}$.

3. Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$, ou si $(X|\Delta)$ est Fano, alors $\pi_1(X|\Delta)$ est presque abélien, et fini si $(X|\Delta)$ est finie (voir l'exemple 11.24).

4. Plus généralement, si $(X|\Delta)$ est spéciale ^{div} (voir 7.6), alors $\pi_1(X|\Delta)$ est presque abélien.

Dans ce cas particulier, le lemme de “dévissage” 10.12 permet de réduire la conjecture 12.10.(1) à ses cas particuliers 12.10.(2) et (3).

Proposition 12.11 *Supposons la conjecture $C_{n,m}^{orb}$ vraie, ainsi que les énoncés (2) et (3) de la conjecture 12.10. Alors l’énoncé (1) de la conjecture 12.10 est également vrai.*

Démonstration : Il suffit de montrer que si $f : (X|\Delta) \dashrightarrow Y$ est une fibration dont la base orbifolde stable et la fibre orbifolde générique ont un π_1 presque abélien, alors $G := \pi_1(X|\Delta) \in \widetilde{Ab}$ aussi. Or G est extension d’un groupe presque abélien de type fini par un autre groupe du même type, et il est donc polycyclique, et en particulier résoluble linéaire, et résiduellement fini. Il résulte donc de 11.34 que G est presque presque-abélien \square

Remarque 12.12 0. On a montré en 11.34 que la conjecture 12.10(1) est vraie si $\pi_1(X|\Delta)$ est supposé linéaire.

1. Le cas particulier de 12.10(3) où $(X|\Delta)$ est Fano (ie : $-K_{(X|\Delta)}$ ample) est peut-être accessible par les méthodes L^2 , ou la construction de métriques orbifoldes à courbure de Ricci positive lorsque les multiplicités sont finies. (Dans le cas logarithmique, la condition $(X|\Delta)$ Fano n’implique en effet pas que : $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$).

2. Le cas particulier où $K_{(X|\Delta)} \equiv 0$ est peut-être accessible par l’usage de métriques de Kähler-Einstein. (Voir [Ca02] pour le cas très particulier des variétés à singularités quotient).

3. Lorsque $(X|\Delta)$ est RE, la conjecture 12.10.(3) est vraie, par 11.25. La conjecture 12.10.(3) est donc une conséquence de 11.25, et de la conjecture 5.26.

Exemple 12.13 Soit $(\mathbb{P}^2|\Delta)$, où $\Delta := \frac{2}{3}.C + \frac{1}{2}.Q$, C (resp. Q) étant une cubique (resp. conique) lisse, C et Q se coupant transversalement.

Alors $K_{\mathbb{P}^2} + \Delta \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$. Si $u : P := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ est le revêtement double ramifié le long de Q , alors $C' := u^{-1}(C)$ est lisse de bidegré $(3, 3)$. Le revêtement cyclique S de degré 3 de P ramifié le long de C' est une surface $K3$ (car $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, par utilisation de suites spectrales). Donc $\pi_1(\mathbb{P}^2|\Delta) \cong \mathbb{Z}_6$ (puisque l’on peut aussi d’abord prendre le revêtement triple de \mathbb{P}^2 ramifié le long de C). On retrouve ainsi la conclusion de 11.4 dans ce cas particulier.

Question 12.14 Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, entière et finie, avec $X \in \mathcal{C}$ connexe. Existe-t-il $Y \in \mathcal{C}$, normal et à singularités terminales, tel que :

1. $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X|\Delta)$ soient commensurables (ie : admettent des sous-groupes d'indices finis isomorphes) ?
2. les revêtements universels de Z et de $(X|\Delta)$ soient analytiquement isomorphes ?

Lorsque $(X|\Delta)$ admet un revêtement étale fini $\bar{X} \rightarrow (X|\Delta)$ comme en 11.29, et en particulier lorsque $\pi_1(X|\Delta)$ est résiduellement fini, la réponse à ces deux questions est “oui”, avec $Z = Y = \bar{X}$.

12.3 Pseudométrie de Kobayashi

On rappelle la notion de pseudométrie de Kobayashi d'une orbifolde géométrique $(X|\Delta)$: c'est la plus grande des pseudométriques $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ telles que $d \leq h^*(d_{\mathbb{D}})$, pour tout morphisme orbifolde $h : \mathbb{D} \rightarrow (X|\Delta)$, $d_{\mathbb{D}}$ étant la métrique de Poincaré sur le disque unité \mathbb{D} . On la note $d_{(X|\Delta)}$. Considérant seulement les morphismes orbifoldes divisibles : $\mathbb{D} \rightarrow (X|\Delta)$, on obtient la pseudométrie *classique* (ou *divisible*) $d_{(X|\Delta)}^*$. On a : $d_{(X|\Delta)} \leq d_{(X|\Delta)}^*$.

Conjecture 12.15 Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse, avec $X \in \mathcal{C}$, connexe.

1. $d_{(X|\Delta)}$ est nulle si et seulement si $(X|\Delta)$ est spéciale.
2. Si $(X|\Delta)$ est de type général, il existe un ouvert de Zariski dense U de X tel que la restriction de $d_{(X|\Delta)}$ à $U \times U$ soit une métrique.
3. Si $c : (X|\Delta) \rightarrow C(X|\Delta)$ est le coeur, alors $d_{(X|\Delta)} = c^*(d_{(C(X|\Delta)|\Delta(c, \Delta))})$.

Remarque 12.16

1. La conjecture (1) précédente peut être réduite aux cas $\kappa = 0$ et $\kappa^+ = -\infty$ par dévissage si l'on peut montrer qu'une orbifolde géométrique munie d'une fibration a une pseudométrie de Kobayashi nulle s'il en est de même pour sa base et ses fibres orbifoldes.

2. L'assertion (2) est une version orbifolde de la conjecture hyperbolique de S. Lang.

3. L'assertion (3) signifie qu'il n'y a pas d'obstruction globale au relèvement à $(X|\Delta)$ des morphismes orbifoldes $h : \mathbb{D} \rightarrow (C(X|\Delta)|\Delta(c, \Delta))$, base orbifolde du coeur.

4. La conjecture 12.15(1) est établie pour les courbes dans [C-W05], où l'on montre aussi que le lemme de Brody reste valable en version orbifold géométrique. Dans [C-P 05], une version orbifold des théorèmes d'hyperbolicité de Bogomolov et McQuillan est établie pour certaines surfaces orbifoldes avec $(c_1^2 - c_2) > 0$. Voir [R 08] pour de nombreux compléments intéressants et améliorations sur ce sujet.

On peut tenter de relier l'annulation de la pseudométrie de Kobayashi orbifold à l'existence de courbes entières orbifoldes.

Conjecture 12.17 Soit $(X|\Delta)$ une orbifold lisse, avec $X \in \mathcal{C}$. On a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $(X|\Delta)$ est spéciale.
2. $d_{(X|\Delta)} \equiv 0$.
3. Il existe une Δ^{div} -courbe entière (ie : un morphisme $h : \mathbb{C} \rightarrow (X|\Delta)^{\text{div}}$) dont l'image est Zariski-dense dans X .
4. Il existe une Δ^{div} -courbe entière dont l'image est dense (pour la topologie analytique) dans X .
5. Tout sous-ensemble fini de X est contenu dans une Δ^{div} -courbe entière dont l'image est dense dans X .

Exemple 12.18

1. Soit X une variété quasi-projective lisse, et $X = (\overline{X} - D)$ une compactification de X lisse telle que D soit un diviseur à croisements normaux de \overline{X} . On dit que X est spéciale si $(\overline{X}|D)$ est spéciale. Cette définition ne dépend pas de la compactification choisie. La conjecture précédente affirme donc en particulier que X est spéciale si et seulement si elle contient une courbe entière (au sens usuel) Zariski-dense.

2. Un récent (Novembre 2008) preprint de J. Winkelmann caractérise les surfaces quasi-projectives X dont l'application quasi-Albanese a une image de dimension 2, et qui contiennent une courbe entière Zariski-dense. Sa caractérisation semble coïncider dans ce cas avec le fait d'être spéciale, et donc fournir pour cette classe de surfaces une solution (positive) de la conjecture précédente.

3. Si $(X|\Delta)$ lisse, entière, avec $X \in \mathcal{C}$ contient une Δ^{div} -courbe entière Zariski-dense, elle est d'après la conjecture précédente, spéciale, et son groupe fondamental est donc presque-abélien. En particulier, une variété

*quasi-projective contenant une courbe entière (au sens usuel) Zariski-dense
à un groupe fondamental presque-abélien.*

12.4 Points rationnels : corps de fonctions

Soit B une courbe projective complexe lisse et connexe, et $k_B := \mathbb{C}(B)$ le corps de ses fonctions méromorphes. Soit $f : X \rightarrow B$ une application holomorphe surjective et connexe, X étant une variété projective complexe lisse (et connexe, donc). Pour $b \in B$, on note X_b la fibre schématique de f au-dessus de b . On suppose X muni d'une structure d'orbifolde géométrique lisse $(X|\Delta)$ qui induit, pour $b \in B$ générique, une structure d'orbifolde géométrique lisse $(X_b|\Delta_b) = (X|\Delta)_b$ sur X_b . On dira simplement que $(X|\Delta)$ est une orbifolde géométrique lisse définie sur k_B . On dira que $(X|\Delta)$ est spéciale (resp. de type général, etc...) s'il en est de même pour $(X_b|\Delta_b)$, pour $b \in B$ général. Voir [Ca 01] pour plus de détails.

Un point k_B -rationnel s de X sur k_B est une section $s : B \rightarrow X$ de f . On note $X(k_B)$ l'ensemble de ces points. (Cet ensemble est essentiellement un invariant birationnel de (X, f) : si (X', f') est un second modèle birationnel de f , $X(k_B)$ et $X'(k_B)$ coïncident sur un ouvert de Zariski non vide commun).

Soit $S \subset B$ un sous-ensemble fini au dessus du complémentaire duquel $(X|\Delta)$ a *bonne réduction*, c'est-à-dire est tel que $(X_b|\Delta_b)$ est lisse si $b \notin S$.

Si $\Delta = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) D_j$, si $s \in X(k_B)$, si $b \notin S$, et si $j \in J$, on note $(s.D_j)_b$ l'ordre de contact en $s(b)$ de $s(B)$ avec D_j . C'est un entier positif (ou nul).

On définit alors $(X|\Delta)(k_B, S)$ comme le sous-ensemble des $s \in X(k_B)$ tels que $\forall j, b \notin S$, on ait : $(s.D_j)_b \geq m_j$ si $(s.D_j)_b \geq 1$. Autrement dit : l'ordre de contact doit être *au moins* égal à m_j si $s(b) \in D_j$, ceci pour tous $j \in J, b \notin S$.

On note $(X|\Delta)(k_B)$ la réunion des $(X|\Delta)(k_B, S')$, lorsque $S' \subset B$ est finie, de complémentaire de bonne réduction au sens précédent. Cet ensemble est essentiellement un invariant birationnel de $((X|\Delta), f)$.

On peut définir ces notions en version *classique* : $(X|\Delta)^*(k_B, S)$ est alors le sous-ensemble des $s \in X(k_B)$ tels que $\forall j, b \notin S$, on ait : $(s.D_j)_b$ est **divisible par** m_j . On a, bien sûr : $(X|\Delta)^*(k_B, S) \subset (X|\Delta)(k_B, S)$.

Les extensions finies de corps k'/k correspondent bijectivement aux morphismes finis $B' \rightarrow B$, B' courbe projective lisse et connexe, posant : $k' = k_{B'}$. Un morphisme $f : (X|\Delta) \rightarrow B$ comme ci-dessus définit alors par changement de base (et désingularisation) un morphisme $f' : (X'|\Delta') \rightarrow B'$, et des in-

clusions $(X|\Delta)(k_B, S) \subset (X|\Delta)(k_{B'}, S')$, avec S' image inverse de S dans B' .

Si $g : (X|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta_Y)$ est un morphisme orbifold au-dessus de B , il induit naturellement une application $f : (X|\Delta)(k_B, S) \rightarrow (Y|\Delta_Y)(k_B, S), \forall S$. Si f est un morphisme orbifold *divisible (ou classique)*, il induit de même une application $f : (X|\Delta)^*(k_B, S) \rightarrow (Y|\Delta_Y)^*(k_B, S)$.

On dit que $f : (Y|\Delta_Y) \rightarrow B$ est **isotrivial** s'il existe $B' \rightarrow B$ fini, et $(F|\Delta_F)$ une orbifold géométrique lisse telle que $(Y|\Delta_Y) \times_B B'$ soit birationnel au-dessus de B' à $(F|\Delta_F) \times B'$.

On dit que $(X|\Delta)$ n'a pas de quotient isotrivial (sur k_B) s'il n'existe pas de morphisme orbifold méromorphe $g : (X|\Delta) \dashrightarrow (Y|\Delta_Y)$ dominant au-dessus de B tel que $(Y|\Delta_Y)$ soit isotrivial.

Conjecture 12.19 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse définie sur k_B , et sans quotient isotrivial.*

1. $(X|\Delta)$ est spéciale si et seulement s'il existe une extension finie $k_{B'}/k_B$ telle que $(X|\Delta)(k_{B'})$ soit Zariski dense (ie : tel que la réunion des $s(B), s \in (X|\Delta)(k_{B'})$ soit Zariski dense dans $X_{B'}$).

2. $(X|\Delta)$ est de type général si et seulement s'il existe un ouvert de Zariski dense U de X tel que, pour toute extension finie $k_{B'}/k_B$, l'ensemble des $s \in (X|\Delta)(k_{B'})$ tels que $s(B')$ rencontre U soit fini.

Remarque 12.20

1. La conjecture 12.19.2. est la version orbifold de la conjecture corps de fonctions de Bombieri-Lang.

2. Le coeur montre que si $(X|\Delta)$ n'est pas spéciale, et si 12.19.2. est vraie, alors $(X|\Delta)(k_{B'})$ n'est Zariski dense pour aucune extension finie $k_{B'}/k_B$, ce qui établit 12.19.1. dans ce cas. Plus précisément, si 12.19.2. est vraie, alors $(c_{(X|\Delta)}(X|\Delta)(k')) \cap U$ est fini, pour toute extension finie $k_{B'}/k_B$, et pour un ouvert de Zariski non vide U de $C(X|\Delta)$.

3. La densité potentielle des orbifoldes géométriques lisses spéciales peut être conjecturalement réduite aux cas $\kappa = 0$ et $\kappa_+ = -\infty$ par le même "déviage" et sous les mêmes hypothèses que dans les cas précédents.

4. Voir [Ca 05] pour un cas particulier en dimension relative 2.

12.5 Points rationnels : arithmétique

Ce cas est analogue au précédent (aux questions usuelles d'isotrivialité près). On renvoie à [Abr06] en particulier pour une présentation et une dis-

cussion détaillée des notions présentées ici.

Si $X, \Delta = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot D_j$ sont définis sur un corps de nombres k , X lisse et $\text{Supp}(\Delta)$ à croisements normaux, et si $\mathcal{X}, \mathcal{D} = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) \cdot \mathcal{D}_j$ sont des modèles de $X, D_j, \forall j$ définis et de bonne réduction (ie : si la réduction de Δ reste à croisements normaux pour toute place $v \notin S$) sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{k,S}$, on note alors $(X|\Delta)(\mathcal{O}_{k,S})$ l'ensemble des points $\mathcal{O}_{k,S}$ -intégraux $x \in X(\mathcal{O}_{k,S})$ tels que pour toute place $v \notin S$ de \mathcal{O}_k , et tout $j \in J$, le nombre d'intersection arithmétique $(x \cdot \mathcal{D}_j)_v$ de x avec \mathcal{D}_j en v est : soit nul, soit supérieur ou égal à m_j .

Pour tout k, S fixés, les points intégraux de (X/Δ) sont essentiellement indépendants des modèles choisis : deux modèles étant choisis, ces points intégraux coïncident sur un ouvert de Zariski non vide (“commun”) de X .

On peut introduire la notion plus restrictive de points intégraux **classiques** en imposant la condition que les nombres d'intersection arithmétiques $(x \cdot \mathcal{D}_j)_v$ soient divisibles par m_j . Voir [DG98] dans le cas des courbes pour les multiplicités “classiques”, et [Ca05] pour les différences et motivations. On notera $(X|\Delta)^*(\mathcal{O}_{k,S})$ l'ensemble de ces points intégraux “classiques”. On a évidemment (pour un modèle fixé) : $(X|\Delta)^*(\mathcal{O}_{k,S}) \subset (X|\Delta)(\mathcal{O}_{k,S})$.

Si $f : (X|\Delta) \rightarrow (Y|\Delta')$ est un morphisme orbifold défini sur k , il induit une application naturelle $f : (X|\Delta)(\mathcal{O}_{k,S}) \rightarrow (Y|\Delta')(\mathcal{O}_{k,S})$, sur des modèles sur lesquels f est défini. Si ce morphisme est un morphisme orbifold *divisible*, il induit aussi une application $f : (X|\Delta)^*(\mathcal{O}_{k,S}) \rightarrow (Y|\Delta')^*(\mathcal{O}_{k,S})$.

Conjecture 12.21 *Soit $(X|\Delta)$ une orbifold géométrique lisse définie sur k , un corps de nombres⁵⁵. On suppose fixé un modèle défini sur $\mathcal{O}_{k,S}$ comme ci-dessus.*

1. *$(X|\Delta)$ est spéciale si et seulement s'il existe une extension finie k'/k telle que $(X|\Delta)(k')$ soit Zariski dense pour un, et donc tout modèle. (“Densité potentielle”).*

2. *$(X|\Delta)$ est de type général si et seulement s'il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset X$ tel que, pour toute extension finie k'/k , $(X|\Delta)(k') \cap U$ soit fini pour un, et donc tout modèle.*

On peut formuler ces deux conjectures à la fois pour les points intégraux “classiques” et “non-classiques”. La première (resp. la seconde) est plus forte en version “classique” (resp. “non-classique”).

⁵⁵On pourrait formuler cette conjecture, plus généralement, pour k de type fini sur \mathbb{Q} .

Remarque 12.22

1. La conjecture 12.21.2. n'est qu'une version orbifold de géométrie de la conjecture arithmétique de Bombieri-Lang. Remarquons que cette conjecture est ouverte même pour les courbes, pour lesquelles elle résulte cependant de la conjecture abc (voir [Ca05]). La version corps de fonctions complexes est cependant établie dans [Ca05]. La version "classique" peut être cependant déduite du théorème de Faltings (voir [DG98]).

2. Le coeur montre que si $(X|\Delta)$ n'est pas spéciale, et si 12.21.2. est vraie, alors $(X|\Delta)(k')$ n'est Zariski dense pour aucune extension finie k'/k , ce qui établit 12.21.1. dans ce cas. Plus précisément, si 12.21.2. est vraie, alors $(c_{(X|\Delta)}(X|\Delta)(k')) \cap U$ est fini, pour toute extension finie k'/k , et pour un ouvert de Zariski non vide U de $C(X|\Delta)$.

3. La densité potentielle des orbifolles géométriques lisses spéciales peut être conjecturalement réduite aux cas $\kappa = 0$ et $\kappa_+ = -\infty$ par le même "dévissage" que dans les cas précédents.

12.6 Multiplicités "classiques" et "non-classiques".

La considération des multiplicités "non-classiques" (basée sur *inf* et non *pgcd*) est justifiée par plusieurs raisons (voir aussi divers aspects dans [Ca05]) :

1. La compatibilité exacte avec les faisceaux de différentielles symétriques (prop. 2.10).

2. La bijection entre faisceaux de Bogomolov saturés et fibrations de type général (théorème 8.9), plus généralement, l'égalité entre $\kappa(X|\Delta)$ et $\kappa(f|\Delta)$ (voir théorème 4.3).

3. L'existence de multisections orbifoldes locales d'une fibration est assurée si la base orbifold est définie avec les multiplicités *inf*, mais non avec les multiplicités *pgcd*. Ce qui justifie la préservation conjecturale de certaines propriétés par "extension" orbifold (i.e : si fibres et base orbifold d'une fibration la possèdent, alors l'orbifold ambiante aussi).

Une propriété importante des multiplicités *pgcd* qui est perdue par les multiplicités *inf* est la compatibilité avec le groupe fondamental (voir 11.6).

En sens inverse, on peut attendre, parfois, un comportement similaire pour les orbifolles définies par ces deux types de multiplicités. On a par exemple (question 7.6) :

Question 12.23 *Est-il vrai que : $(X|\Delta)$ spéciale^{div} $\iff (X|\Delta)$ spéciale ?*

On a vu qu'une réponse affirmative à 12.23 résulterait d'une telle réponse à la question 12.24 suivante.

Question 12.24 1. Soit $(X|\Delta)$ lisse, entière et finie, X dans \mathcal{C} . Soit $f : (X|\Delta) \rightarrow Y$ une fibration. On suppose que les fibres orbifoldes de f sont spéciales. A-t-on alors : $\Delta(f|\Delta) = \Delta^*(f|\Delta)$? (On suppose que $\Delta^{vert} = 0$)

Cette propriété est satisfaite lorsque $\Delta = 0$ si X_y est rationnellement connexe ($\Delta(f) = 0$), ou si X_y est un tore complexe. Le premier cas non-trivial est celui dans lequel X_y est une surface $K3$ et Y une courbe. Remarquons que cette propriété est en défaut déjà lorsque X_y est une courbe de type général. Remarquons enfin qu'il suffit de vérifier la propriété 12.24 lorsque Y est une courbe (projective).

Si cette propriété de 12.24 est satisfaite, et si $c : (X|\Delta) \rightarrow C$ est le "cœur" d'une orbifolde lisse $(X|\Delta)$, avec $X \in \mathcal{C}$, alors $\pi_1(X|\Delta)$ est extension de $\pi_1(F)$ (conjecturalement presque abélien) par $\pi_1(B)$, si F (resp. B) est la fibre orbifolde générique (resp la base orbifolde) de c .

Une question apparentée à 12.24 est la conjecture 12.21, qui affirme l'équivalence quantitative des ensembles de points entiers "classiques" et "non-classiques". De manière analogue, la conjecture 5.26 et la question 5.80 postulent l'équivalence quantitative des ensembles de courbes Δ -rationnelles "divisibles" et "non-divisibles".

12.7 Formes différentielles

Soit $(X|\Delta)$ une orbifolde géométrique lisse avec $X \in \mathcal{C}$.

Soit $q \geq 0$ un entier, et $\Omega^q(X|\Delta) := \bigoplus_{N \geq 0} H^0(X, S_q^N)$ l'algèbre des q -formes différentielles symétriques sur $(X|\Delta)$.

Pour $x \in X, x \notin \text{Supp}(\Delta)$, on a une application naturelle d'évaluation en $x : ev_x^q : \Omega^q(X|\Delta) \rightarrow \bigoplus_{N \geq 0} \text{Sym}^N(\Omega_{X,x}^q)$.

Conjecture 12.25

1. Si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$, alors $\Omega^q(X|\Delta) = \mathbb{C}, \forall q \geq 0$.
2. Si $\kappa(X|\Delta) = 0$, alors ev_x^q est injective pour $x \in X$ générique.

Remarque 12.26

0. La conjecture précédente entraîne en particulier que : si $L \subset \Omega_X^p, p > 0$, on a : $\kappa((X|\Delta), L) \leq 0$ si $\kappa(X|\Delta) = 0$, et : $\kappa((X|\Delta), L) = -\infty$ si $\kappa_+(X|\Delta) = -\infty$.

1. La conjecture 12.25.1 est vraie pour les variétés rationnellement connexes (avec $\Delta = 0$). Elle l'est aussi pour les orbifolles rationnellement connexes (au sens orbifolde). Elle doit pouvoir être établie au moins dans le cas des multiplicités entières et finies à l'aide de métriques orbifoldes à courbure de Ricci positive.

2. La conjecture 12.25.2 est vraie pour les variétés Kählériennes compactes avec $c_1(X) = 0$ (et $\Delta = 0$), par la solution de la conjecture de Calabi sur l'existence de métriques de Kähler Ricci-plates et le parallélisme des q -formes symétriques qui en résulte. La conjecture de K. Ueno ($h^0(X, \Omega_X^q) \leq \frac{n!}{q!(n-q)!}$ si $\kappa(X) = 0$, avec $n := \dim(X)$) est un cas particulier de 12.25. Elle doit pouvoir être établie au moins dans le cas des orbifolles géométrique à multiplicités entières et finies à l'aide de métriques orbifoldes à courbure de Ricci nulle.

3. Une conjecture sur l'algèbre $\Omega^q(X|\Delta)$ lorsque $(X|\Delta)$ est spéciale semble plus difficile à formuler, le dévissage exposé au §10.5 ne fournissant pas de structure simple apparente, même en admettant 12.25.

12.8 Familles de variétés canoniquement polarisées.

De façon vague, il est conjecturé que “l'espace des modules fin” des variétés de type général a des composantes irréductibles qui sont elles-mêmes de type général.

Dans le cas des variétés à fibré canonique ample (dont les courbes de genre $g \geq 2$ fournissent l'exemple classique), on va présenter des résultats et une conjecture plus précise, dont le cadre naturel semble être justement les notions d'orbifolles géométriques logarithmiques spéciales et de “coeur” développées dans le présent texte.

Soit $g : V \rightarrow B$ un morphisme projectif, submersif et à fibres connexes de V , lisse, sur une base B quasi-projective connexe. On supposera que $B = \bar{B} - D$, où \bar{B} est projective lisse, et D un diviseur à croisements normaux de \bar{B} . Donc B n'est autre que l'orbifolde géométrique logarithmique (\bar{B}/D) . On notera : $\bar{\kappa}(B) := \kappa(\bar{B}/D)$.

On suppose que g est une **famille de variétés canoniquement polarisées**, c'est-à-dire satisfait les conditions précédentes, et que, de plus, le faisceau canonique relatif $K_{V/B}$ est ample sur toutes les fibres $V_b, b \in B$ de g .

On note alors : $Var(g)$ le rang de l'application de Kodaira-Spencer $ks_g(b) : TB_b \rightarrow H^1(V_b, TV_b)$ au point générique de B . Donc $Var(g) = 0$ si et seulement si g est isotriviale (ie : ses fibres sont deux-à-deux isomorphes).

Notre conjecture ⁵⁶ est la suivante :

Conjecture 12.27 *Si $B = (\bar{B}/D)$ est spéciale, la famille g est isotriviale.*

Donc, $\text{Var}(g) \leq \dim(C(\bar{B}/D))$, la dimension du “coeur” de la base orbifold géométrique logarithmique de la famille considérée, dans le cas général.

En effet, pour B arbitraire, la restriction de g au-dessus des fibres du “coeur” $c_B : \bar{B} \rightarrow C(\bar{B}/D)$ de B serait isotriviale, et la “variation” de g se factoriserait par $C(\bar{B}/D)$ (ie : au point générique b de B , l’application de Kodaira-Spencer $ks_g(b)$ s’annule sur l’espace tangent à la fibre de c_B en b).

Cette conjecture généralise et renforce en les précisant considérablement les 3 conjectures antérieures A, B, C suivantes :

A. (Viehweg, voir [V-Z02]) : si $\text{Var}(g) = \dim(B)$, alors B est de type général (ie : $\bar{\kappa}(B) := \dim(B)$). En effet, cette égalité entraînerait alors : $\dim(B) = \text{Var}(g) \leq \dim(C(\bar{B}/D)) \leq \dim(B)$, or $\dim(B) = \dim(C(\bar{B}/D))$ si et seulement si B est de type log-général.

B. ([Ke-Kov06] Si $\bar{\kappa}(B) = 0$, alors $\text{Var}(g) = 0$ (c’est-à-dire que g est isotriviale). En effet, la condition $\bar{\kappa}(B) = 0$ entraîne que B est Log-spéciale.

C. ([Ke-Kov06] Si $\bar{\kappa}(B) = -\infty$, alors $\text{Var}(g) \leq (\dim(B) - 1)$. En effet, si $\bar{\kappa}(B) = -\infty$, B n’est pas de type Log-général. Et $\dim(C(\bar{B}/D)) \leq (n - 1)$.

La décomposition conditionnelle du coeur montre que les deux cas cruciaux dans lesquels la conjecture devrait être d’abord établie sont les cas où $\bar{\kappa}_+(B) = -\infty$ (et aussi, en particulier, lorsque (\bar{B}/D) est Fano), et lorsque $\bar{\kappa}(B) = 0$ (en particulier lorsque $c_1(\bar{B}/D) = 0$).

Cependant, la conjecture 12.27 traite aussi les nombreux cas dans lesquels (\bar{B}/D) “fibre” de manière itérée (au sens orbifold) avec des fibres de l’un des deux types précédents. Le premier cas non traité par les conjectures A,B,C ci-dessus étant celui dans lequel $\dim(B) = 2$ et soit $\bar{\kappa}(B) = -\infty$, soit $\bar{\kappa}(B) = 1$. Il est résolu ci-dessous, à titre d’exemple (à une exception près, si $\bar{\kappa}(B) = 1$).

La conjecture 12.27 est démontrée lorsque $\dim(B) = 1$ ([Kov96], [Kov00], généralisant le cas classique dans lequel les V_b sont des courbes de genre $g \geq 2$).

Lorsque $\dim(B) = 2$, les conjectures A, B et C ci-dessus sont démontrées dans [Ke-Kov06]⁵⁷.

⁵⁶On pourrait la formuler, plus généralement, lorsque les fibres V_b ont un fibré canonique semi-ample, ou même nef.

⁵⁷Une démonstration de la conjecture 12.27 lorsque $\dim B \leq 3$ vient d’être annoncée dans [J-K 09].

Cependant, lorsque $\dim(B) = 2$, il existe de nombreux cas (B spéciale avec $\bar{\kappa}(B) = 1$ ou $-\infty$) dans lesquels la conjecture 12.27 renforce les conjectures A,B,C (la conclusion étant alors : “ g isotriviale”, et non : “ $\text{Var}(g) \leq 1$ ”).

Théorème 12.28 *Soit $g : V \rightarrow B$ une famille de variétés canoniquement polarisées (dans le sens ci-dessus). On suppose que $\dim(B) = 2$, et que B est spéciale. Alors g est isotriviale (sauf, peut-être, si $\bar{\kappa}(B) = 1$ et si la fibration de Moishezon-Itaka de B est isotriviale).*

Démonstration : Tout comme dans [Ke-Ko06], la démonstration résulte essentiellement du résultat suivant de [V-Z] :

Théorème 12.29 *Soit $g : V \rightarrow B$ une famille de variétés canoniquement polarisées. Il existe alors un entier $N > 0$ et un sous-fibré L de rang 1 de $S_1^N(B) := S_{N,1}(\bar{B}/D) = \text{Sym}^N(\Omega_{\bar{B}}^1(\log(D)))$ tel que $\kappa(\bar{B}, L) \geq \text{Var}(g)$.*

Le théorème 12.28 résulte alors du :

Lemme 12.30 *Soit $B = (\bar{B}/D)$ une orbifolde géométrique lisse, projective et logarithmique spéciale de dimension 2. Pour tout $N > 0$, et pour tout sous-fibré L de rang 1 de $S_1^N(B)$, on a alors : $\kappa(\bar{B}, L) \leq 0$ (sauf, peut-être, si $\bar{\kappa}(B) = 1$ et si la fibration de Moishezon-Itaka de B est isotriviale).*

Démonstration : Nous traitons successivement les cas $\bar{\kappa}(B) = 0$, $\bar{\kappa}(B) = -\infty$, et $\bar{\kappa}(B) = 1$. Les deux premiers cas étant déjà essentiellement connus.

Lorsque $\bar{\kappa}(B) = 0$, le résultat est, en fait, établi dans [Ke-Kov06]. Il nous reste à traiter les cas $\bar{\kappa}(B) = -\infty$ et $\bar{\kappa}(B) = 1$.

Lorsque $\bar{\kappa}(B) = -\infty$, il résulte de [K-McK99] que \bar{B} est recouverte par des courbes rationnelles rencontrant D en au plus un point (unibranche). Si le point générique de \bar{B} est contenu dans 2 telles courbes distinctes (au moins), alors (\bar{B}/D) est spéciale, et g isotriviale (par [Kov00], par exemple).

Sinon, il existe (après éventuelle modification) une fibration $f : (\bar{B}/D) \rightarrow C$ dont la fibre générique est l’une des courbes rationnelles précédentes. Et $D = D^h + D^v$ est alors réunion de sa partie f -verticale D^h , qui est soit vide, soit une section de f (puisque les courbes Δ -rationnelles de \bar{B} rencontrent Δ en au plus un point unibranche), tandis que la partie f -verticale D^v est effective, contenue dans une réunion finie de fibres de f . Soit $F_c \cong \mathbb{P}^1$ une

fibres génériques lisses de f . La restriction de $\Omega_{(\bar{B}/D)}^1$ à $F = F_c, c \in C$ est une extension de $\mathcal{O}_F(-d)$ par $\mathcal{O}_F = f^*(T_{C,c}^*)$, avec $d = 1$ si $D^h \neq 0$, et $d = 2$ sinon. Donc, pour tout $N > 0$, les sections de la restriction de $S_1^N(B)$ à F forment un espace vectoriel complexe de dimension 1 engendré par $f^*((T_{C,c}^*)^{\otimes N})$.

Les sections de $S_1^N(B)$ sont donc de la forme : $f^*(N.(K_C + \Delta_C))$, pour Δ_C un diviseur effectif sur C . Par la proposition 4.6, et l'exemple 3.9, on a l'inclusion : $\Delta_C \leq \Delta(f, D)$.

Si $S_1^N(B)$ admet deux sections non nulles s, t telles que $t = u.s$, pour u méromorphe sur \bar{B} , c'est donc que $1 = \kappa(C|\Delta_C) \leq \kappa(C|\Delta(f, D)) \leq 1$, et $(\bar{B}/D) = B$ n'est donc pas spéciale.

Supposons donc désormais que $\bar{\kappa}(B) = 1$. Soit $f : (\bar{B}/D) \rightarrow C$ la fibration de Moishezon-Iitaka. Nous la supposons non isotriviale. Il suffit alors de démontrer, comme ci-dessus, que $L \subset f^*(N.K_C)$ au-dessus du point générique c de C : puisque l'application de Kodaira-Spencer $ks_f(c)$ n'est pas nulle en c , les classes successives des extensions déduites de la filtration naturelle de quotients $(TF^*)^{\otimes j} \otimes (f^*(TC_c))^{\otimes (N-j)}$ de $Sym^N(\Omega_{\bar{B}}^1)|F$ comme extension de TF^* par $f^*(TC_c)$ sont donc aussi non-nulles. Les sections de $Sym^N(\Omega_{\bar{B}}^1)|F$ se réduisent donc à celles de $(f^*(TC_c))^{\otimes N} = f^*(K_{C,c}^{\otimes N})$ \square

Remarque 12.31 *Il est intéressant de comprendre si la conclusion du lemme 12.30 subsiste dans le cas où $f : (\bar{B}/D) \rightarrow C$ n'est pas isotriviale. Cette question est étroitement liée à la remarque 12.26.3 ci-dessus. Cependant, pour l'étude de la conjecture 12.27, l'approche de [J-K 09], qui précise le théorème 12.29 en montrant que L "provient" de la "base" de la variation de g , est plus naturelle (elle fournit immédiatement 12.28 sans utiliser [K-McK 99] lorsque $\bar{\kappa}(B) = -\infty$, par exemple).*

12.9 Questions

On rappelle les questions suivantes :

12.9.1 Orbifolles log-canoniques.

Voir 2.53 et 2.57

12.9.2 Équivalence biméromorphe des bases orbifoldes.

Voir 3.12. La question est cruciale pour les trois fibrations fondamentales considérées ici : Moishezon-Iitaka, quotient κ -rationnel et coeur.

12.9.3 Courbes Δ -rationnelles.

Voir les questions et conjectures : 5.14, 5.19, 5.26, 5.46, 5.50, 5.55, 5.61, 5.79.

12.9.4 Additivité orbifolde.

Voir 6.1.

12.9.5 Finitude des fibrations de type général.

Voir 8.3.

12.9.6 Hyperbolicité algébrique

Voir question 5.80

13 BIBLIOGRAPHIE

[Abr 07] D. Abramovich. Birational geometry for number theorists. math. AG/0701105v2

[AV 98] D. Abramovich-A. Vistoli. Compactifying the space of stable maps. math. AG/9811059

[Ba75] D. Barlet. Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique de dimension finie. LNM 482 (1975), 1-158.

[B-H-H 87] G. Barthel, F. Hirzebruch, T. Höfer. Geraden-Konfigurationen und Algebraische Flächen. Aspekte der Mathematik. Band D4. Friedr. Vieweg u. Sohn. Braunschweig-Wiesbaden (1987). (Eine Veröffentlichung des Max-Planck Instituts für Mathematik, Bonn).

[B87] F. Beukers. Ternary forms equations. J.Number Theory 54 (1995), 113-133 .

[BCHM06] C. Birkar-P. Cascini-C. Hacon-J. McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. math. AG/0610203

[Bo79] F. Bogomolov. Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties. Math. USSR Izv. 13 (1979), 499-555.

[Br 08] A. Broustet. Communication orale (Novembre 2008).

- [Ca 92] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. Ann. Sc. ENS. 25 (1992), 539-545.
- [Ca93] F. Campana. Remarques sur les groupes de kähler nilpotents. Ann. Sc. ENS 28(1993), 307-316.
- [Ca94] F. Campana. Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes. Bull. SMF 122(1994), 255-284.
- [Ca98] F. Campana. \mathcal{G} -connectedness of compact kähler manifolds. Cont. Math. 241(1999), 85-97.
- [Ca01] F. Campana. Special varieties and classification theory. math.AG/0110151.
- [Ca04] F. Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. Ann. Inst. Fourier. 54 (2004), 499-665.
- [Ca05] F. Campana. Fibres multiples sur les surfaces. Man. Math. 117(2005), 429-461. (arXiv : math/0410469).
- [Ca 09] F. Campana. Quotients résolubles ou nilpotents des groupes de Kähler orbifoldes. arXiv : 0903.0560
- [C-P05] F. Campana-M. Păun. Variétés faiblement spéciales à courbes entières dégénérées. Comp. Math. 143 (2007), 95-111. (arXiv : math.AG/0512124).
- [C-Pe 06] F. Campana-T. Peternell. Geometric stability of the cotangent bundle and the universal cover of a projective manifold. (arXiv : math/0405093).
- [C-W05] F. Campana-J. Winkelmann. A Brody theorem for orbifolds. A paraître à Man. Math. (arXiv : math/0604571).
- [Cla06] B. Claudon. Invariance for multiples of the twisted canonical bundle. Ann. Inst. Fourier 57 (2007), 289-300. (arXiv : Math. AG/0511736).
- [Cla08] B. Claudon. Gamma-reduction for smooth orbifolds. Manuscripta Math. 127 (2008), 521-532. (disponible sur arXiv : 0801.2894).
- [DG98] H. Darmon-A. Granville. On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$. Bull. London Math. Soc. 27(1995), 513-543.
- [De74] P. Deligne. Théorie de Hodge II. Publ. IHES 40 (1972), 5-57.
- [De 79] P. Deligne. Le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien. Exposé Bourbaki 543 (Novembre 1979). Tome 22. LNM 642, 1-10. (disponible sur numdam)
- [Delz06] T. Delzant. L'invariant de Bieri-Neuman-Strebel des groupes fondamentaux des variétés Kählériennes. arXiv : math.DG/0603038

- [Fuj78] T.Fujita. On Kähler fibre spaces over curves. J. Math. Soc. Jap. 30 (1978), 779-794.
- [GHS03] T.Grabber-J.Harris-J.Starr. Families of rationally connected varieties. J. Amer. Math. Soc. 16(2003), 57-67.
- [G-K-K08] D. Greb, S. Kebekus, S. Kovács. Extension theorems for differential forms and Bogomolov-Sommese vanishing on Log-canonical varieties. arXiv : 0808.3647.
- [J-K 09] K. Jabbush, S. Kebekus. Families over special base manifolds and a conjecture of Campana. arXiv :0905.1746
- [Kaw81] Y.Kawamata. Characterisation of Abelian Varieties. Comp. Math. (1981), 253-276.
- [Kaw98] Y.Kawamata. Subadjunction of log-canonical divisors II. Amer. J. Math. 120 (1998), 893-899.
- [Ke-Kov06] S. Kebekus-S. Kovács. Families of canonically polarized varieties over surfaces. (arXiv :math/0511378). To appear in Inv. Math.
- [K-McK99] S. Keel-J. McKernan. Rational curves on quasi-projective surfaces. Memoirs of the AMS 669 (1999).
- [Ko93] J. Kollár. Shafarevitch maps and plurigenera of algebraic varieties. Inv. Math. 113 (1993), 177-215.
- [KoMiMo92] J.Kollár-Y.Miyaoka-S.Mori. Rationally connected varieties. J. Alg. Geom. 1 (1992), 429-448.
- [Kov96] S.Kovács. Smooth families over rational and elliptic curves. JAG 5 (1996), , 369-385.
- [Kov00] S.Kovács. Algebraic hyperbolicity of fine moduli spaces. JAG 9 (2000), 169-174.
- [La86] S. Lang. Hyperbolic and Diophantine Analysis. Bull. AMS 14(1986), 159-205.
- [Lieb78] D.Lieberman. Compactness of the Chow Scheme. LNM 670 (1975), 140-186.
- [Miy 87] Y. Miyaoka. Deformation of a morphism along a foliation. Proc. Symp. Pure Math. vol. 46, 245-268 (1987)
- [Mi-Mo 86] Y. Miyaoka-S. Mori. A numerical criterion for uniruledness. Ann. Math. 124 (1986), 65-69.
- [N87] M.Namba. Branched coverings and algebraic functions. Pitman research Notes in Mathematics series 161. Longman Scientific and Technical (1987).
- [Pa05] M.Păun. Siu's invariance of plurigenera : a one-tower proof . A paraitre au J. Diff.Geom.

- [P-R06] G. Pacienza, E. Rousseau. On the logarithmic Kobayashi conjecture. arXiv :math/0603712
- [R72] M. Raynaud. Flat modules in algebraic geometry. *Comp. Math.* 24 (1972), 11-31.
- [R08] E. Rousseau. Hyperbolicity of geometric orbifolds. arXiv :08091356.
- [Sak 74] F. Sakai. Degeneracy of holomorphic maps with ramifications. *Inv. Math.* 28 (1974), 213-229.
- [SB 92] N. Shepherd-Barron. Miyaoka's theorem on the semi-negativity of T_X . *Astérisque* 211, 103-114 (1992)
- [Siu02] Y.T. Siu. Extension of twisted pluricanonical sections with pluri-subharmonic weights. *Complex Geometry (Göttingen 2000)*, 223-277, Springer (2002).
- [Tak00] S. Takayama. Simple connectedness of weak Fano varieties. *J. Alg. Geom.* 9 (2000), 403-407.
- [U75] K. Ueno. Classification theory of complex analytic manifolds. *LNM* 439 (1975)
- [Vie83] E. Viehweg. Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces. *Ad. Studies in Pure Math.* 1 (1983), 329-353.
- [V-Z02] E. Viehweg-K. Zuo. Base spaces of non-isotrivial families of smooth minimal models. *Complex geometry (Göttingen 2000)*, 279-328. Springer Verlag 2002.

F. Campana
 Département de Mathématiques
 Université Nancy 1
 BP 239
 F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
 campana@iecn.u-nancy.fr